

16º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2025

Análise de um pêndulo oscilatório e estimação dos parâmetros do modelo mediante dados empíricos do sistema

Gabriel Seguro Tavares¹, Leandro José Elias²

¹Graduando em Engenharia Mecânica, Bolsista PIBIC, IFSP, *Campus* Araraquara, g.seguro@aluno.ifsp.edu.br.

²Doutor em Engenharia Elétrica, Professor EBTB do IFSP, *Campus* Araraquara, leandro.elias@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.03.04-0 Sistemas Dinâmicos.

RESUMO: O presente trabalho apresenta alguns resultados de um projeto de iniciação científica, cujo objetivo é a análise teórico-prática de sistemas dinâmicos. A proposta é apresentar um estudo teórico do sistema de um pêndulo oscilatório simples, bastante explorado na literatura. O parâmetro referente ao coeficiente de atrito do sistema é investigado mediante a realização de experimento prático, utilizando um pêndulo construído com materiais de baixo custo. Dessa forma, é proposto um algoritmo para estimar o parâmetro de interesse, com o uso dos dados empíricos obtidos. A simulação em MATLAB é realizada para o modelo matemático, enquanto o software Tracker é utilizado para obter a descrição do movimento do pêndulo, observado nos experimentos realizados.

PALAVRAS-CHAVE: sistemas não lineares; equações diferenciais ordinárias; série de Taylor.

Analysis of an oscillatory pendulum and estimation of the model parameters based on empirical system data

ABSTRACT: This study presents some results from a scientific project aimed at the theoretical and practical analysis of dynamical systems. The proposal is to present a theoretical study of the system of a simple oscillatory pendulum, which is a topic that is extensively addressed in the literature. The friction coefficient parameter is investigated through experimental procedures using a pendulum constructed from low-cost materials. An algorithm is proposed to estimate the parameter of interest based on the empirical data. A mathematical model is simulated using MATLAB, while Tracker software is used to extract the motion profile of the pendulum as observed during the experiments.

KEYWORDS: nonlinear systems; ordinary differential equations; Taylor series.

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta alguns resultados de um projeto de iniciação científica, cujo tema é o estudo teórico-prático de sistemas dinâmicos. Com base nos estudos realizados, é apresentado uma análise do sistema de um pêndulo oscilatório cujo modelo é caracterizado por uma equação não linear. Sistemas envolvendo o pêndulo oscilatório são muito explorados na literatura (Ogata, 2010, Boyce; DiPrima,

2015), e diversos experimentos são utilizados para estudos didáticos e aplicações em diversas áreas, tais como na robótica e na teoria de controle (Wang, 2023; Hazem; Bingül, 2023).

Nos estudos realizados, foi utilizada a expansão em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio para investigar o conjunto de equações não lineares do modelo. A equivalência topológica do sistema não linear com o linearizado, próximo ao ponto de equilíbrio, permite investigar a estabilidade do sistema (Kelley; Peterson, 2010; Monteiro, 2011). O sistema linearizado foi utilizado para estimar o parâmetro de coeficiente de atrito do pêndulo, sendo apresentado um algoritmo a busca deste parâmetro. Foi construído um sistema físico do pêndulo com o uso de materiais de baixo custo, sendo realizados alguns experimentos. Assim, é efetuada a comparação da simulação do sistema em MATLAB, versão R2024a, com os resultados dos experimentos, com o uso do Tracker (UTFPR, 2016).

Este trabalho está organizado com a apresentação da introdução seguido da seção de materiais e métodos, onde são apresentados o modelo e o experimento realizado. Em resultados, são apresentados o algoritmo proposto e as as simulações realizadas. Na sequência, é apresentada uma breve conclusão.

MATERIAIS E MÉTODOS

O pêndulo oscilatório vertical consiste de uma massa presa por uma haste fixa em uma base superior que oscila após uma excitação inicial, representado pela Figura 1: (A). Um modelo do sistema é

$$ml^2\theta'' = -c\dot{\theta} - mgl \sin(\theta), \quad (1)$$

onde m e l são a massa e o comprimento do pêndulo, respectivamente, e c é o coeficiente de atrito.

Figura 1: (A) Sistema do Pêndulo Oscilatório

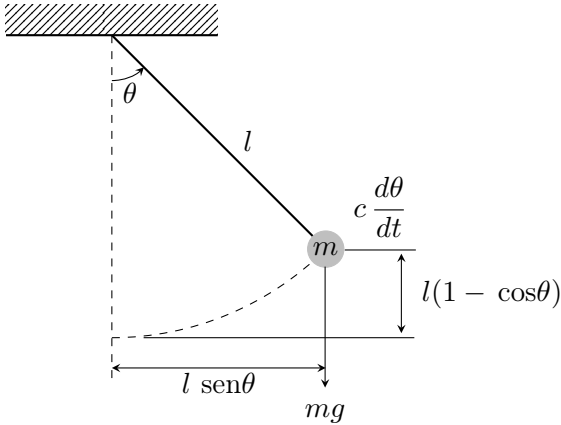
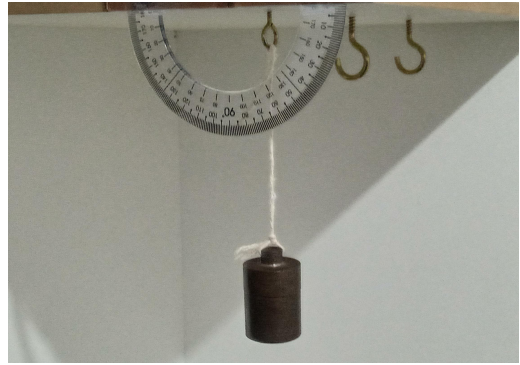


Figura 1: (B) Sistema físico



Fazendo a mudança de variáveis, $x_1 = \theta$ e $x_2 = \theta'$, obtém-se o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{c}{ml}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1), \end{cases} \quad (2)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema (2) são $P_{e1} = (x_1, x_2) = (0, 0)$ e $P_{e2} = (x_1, x_2) = (\pi, 0)$. O segundo ponto de equilíbrio, não é possível para o sistema investigado, pois se trata da análise do pêndulo invertido.

O sistema linearizado, em torno do ponto de equilíbrio P_{e1} , utilizando a série de Taylor é (Kelley;

Peterson, 2010; Monteiro, 2011)

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{c}{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

e os autovalores da matriz associada ao sistema linearizado são obtidos por

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4m^2gl}}{2ml}. \quad (4)$$

Como os parâmetros do sistema são todos positivos, verifica-se que os autovalores da equação (4) possuem parte real negativa, o que garante a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio P_{e1} .

Foi realizado um experimento para o sistema do pêndulo oscilatório e o modelo físico é descrito na Figura 1: (B). Na construção do pêndulo foram utilizados material de baixo custo: uma base de madeira, um transferidor e uma massa de metal suspensa por um fio de barbante. Os valores de parâmetros do experimento são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Valores dos Parâmetros do sistema

Parâmetros	l	g	m
Valores	0,1 (m)	9,81 (m/s)	0,238 (Kg)

O coeficiente de atrito c do sistema não pode ser definido previamente, pois esse parâmetro tem relação com o tipo de material utilizado na construção do pêndulo e do meio em que o experimento é realizado. Em Moreira et al. (2019) é apresentado um experimento semelhante do pêndulo oscilatório com o auxílio do software Tracker. Contudo, os autores não apresentaram um método sistemático para obter o coeficiente de atrito.

Na realização do experimento, verifica-se que a massa do pêndulo oscila em torno da origem (ponto de equilíbrio P_{e1}) até parar. Esse movimento é caracterizado por um autovalor complexo com parte real negativa (Monteiro, 2011). Dessa forma, considerando os valores de parâmetros da Tabela 1, os autovalores $\lambda = (-c \pm \sqrt{c^2 - 0,0556})/(0,0476)$ devem ser calculados para c real e positivo, satisfazendo $c^2 < 0,0556$, ou seja, $c \in I = (0, 0,2358)$.

Ao escolher um valor para $c \in I$, os autovalores obtidos na forma complexa são $\lambda = \alpha \pm \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, e a solução analítica da equação de movimento do pêndulo é (Boyce; DiPrima, 2015; Zill, 2016) :

$$x_1(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t), \quad c_1 = x_{1(0)}, \quad c_2 = \frac{x_{2(0)} - \alpha x_{1(0)}}{\beta}. \quad (5)$$

onde $x_{1(0)}$ e $x_{2(0)}$ são a posição inicial e a velocidade inicial, respectivamente. Verifica-se que a solução $x_1(t)$ tem período $T = \frac{2\pi}{\beta}$ e que converge para o ponto de equilíbrio P_{e1} .

A seguir é apresentado uma forma sistemática para a escolha do coeficiente de atrito c .

RESULTADOS E DISCUSSÃO

No experimento de oscilação do pêndulo, foram tomados diferentes valores para a posição inicial $x_{1(0)}$ de acordo a Tabela 2, considerando a velocidade inicial $x_{2(0)}$ nula em todos os casos. Para cada posição inicial $x_{1(0)}$, foi cronometrado o tempo total de oscilação do pêndulo, ou tempo decorrido até o pêndulo parar, denotado por valores de referência t_r .

O Algoritmo 1 foi implementado em MATLAB, para cada experimento realizado, utilizando os

valores dos parâmetros descritos na Tabela 2, a função $x_1(t)$ definida na equação (5), $\varepsilon_1 = 1$ e $\varepsilon_2 = 0,002$. Assim, foram obtidos os valores dos coeficientes de atrito c em cada situação investigada, apresentados na Tabela 2.

Algoritmo 1: Estimar o valor do coeficiente de atrito c

```

Inserira o valor da posição inicial  $x_{1(0)}$  e da referência  $t_r$ ;
Defina  $\varepsilon_1$  e  $ERRO = |t_r - t_f|$ ,  $t_f = 0$ ,  $c_i \in (0, 0,2358)$  e um incremento  $k$ ;
while  $ERRO > \varepsilon_1$  do
    Defina  $c = c_i$ ;
    Calcule  $\lambda$  e o período  $P$ . Defina a função  $x_1(t)$ ;
    Calcule o tempo inicial  $t_0 = t(j)$ ,  $j = \arg \left[ \max_{0 \leq t \leq P} (x_1(t)) \right]$ ;
    Escolha  $\varepsilon_2$  e defina  $t = t_0$ ,  $erro = |x_1(t)|$ ;
    while  $erro > \varepsilon_2$  do
        Atualize  $t = t_0 + P$  e  $erro = |x_1(t_0)|$ ;
    Defina  $t_f = t$ ;
    Atualize  $ERRO = |t_r - t_f|$  e  $c_i = c_i + k$ ;

```

Tabela 2: Valores de referência utilizados nos experimentos

Experimento	Posição Inicial $x_{1(0)}$		Tempo	Coeficiente de atrito c
	Graus	Radianos	Segundos	Ns/rad
1	5,0	0,0872	196	0,000920
2	7,5	0,1309	216	0,000925
3	10,0	0,1745	235	0,000908
4	12,5	0,2181	241	0,000930
5	15,0	0,2617	253	0,000920
6	17,5	0,3054	272	0,000880
7	20,0	0,3490	309	0,000799

A escolha do valor inicial c_i e do incremento k no Algoritmo 1 permite refinar a busca do coeficiente c . Verifica-se nos resultados obtidos para o coeficiente de atrito, uma dependência do valor de c em relação à posição inicial $x_{1(0)}$, embora admita-se inicialmente que esse parâmetro seja uma constante fixa.

Essa diferença nos valores obtidos para c em cada experimento pode ser justificada pelo fato do modelo linear (utilizado no algoritmo) é válido próximo ao ponto de equilíbrio (origem), cuja solução fica mais distante do modelo não linear quando se afasta desse ponto. A precisão das marcações de tempo no experimento também podem impactar os valores obtidos. Uma outra forma de abordar as diferenças de valores obtidos para o coeficiente c é considerar esse parâmetro como uma função da posição inicial, ou seja, o parâmetro é uma função do tempo, de forma similar ao sistema investigado em Tavares e Elias (2025).

Para ilustrar os resultados obtidos, foi realizada a simulação do sistema (2), tomando os parâmetros da Tabela (1) e demais valores do primeiro experimento, $x_{1(0)} = 0,0872$ m, $x_{2(0)} = 0$ m/s e $c = 0,00092$ Ns/rad. As Figuras 2: (A) e 2: (B) mostram a oscilação do do pêndulo em toda contagem de tempo, na simulação em MATLAB e na filmagem do experimento com o Tracker, respectivamente.

Um destaque para a oscilação do pêndulo nos instantes finais da contagem de tempo é apresentado na Figura 3: (A), para a simulação em MATLAB, e na Figura 3: (B), para o Tracker. Verifica-se que a

distância entre a crista (ou vale) das oscilações, em relação à origem, ficam abaixo de 0,002 m próximo ao tempo de 196 segundos.

Figura 2: (A) Simulação em MATLAB de $x_1(t)$ durante a contagem de tempo.

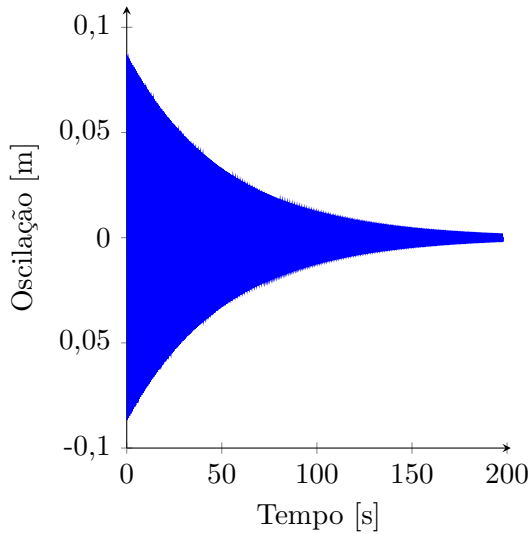


Figura 2: (B) Oscilação de $x_1(t)$ obtida pelo Tracker durante a contagem de tempo.

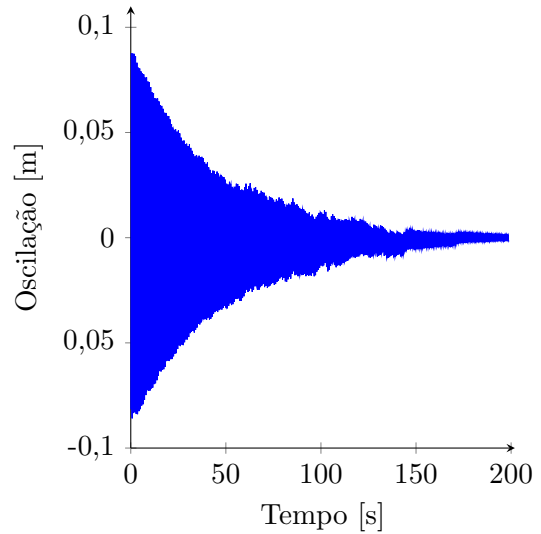


Figura 3: (A) Simulação em MATLAB de $x_1(t)$ nos instantes finais do tempo.

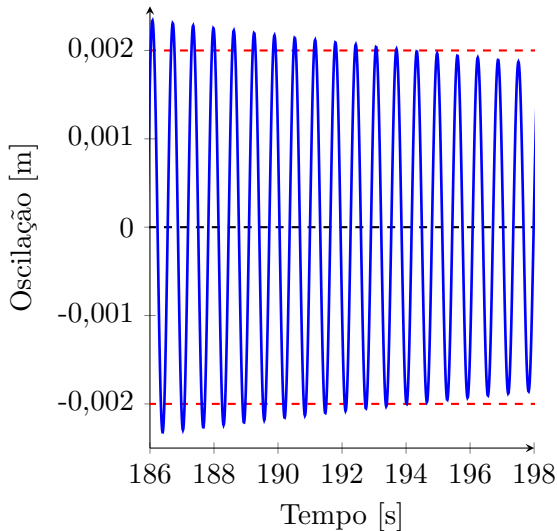
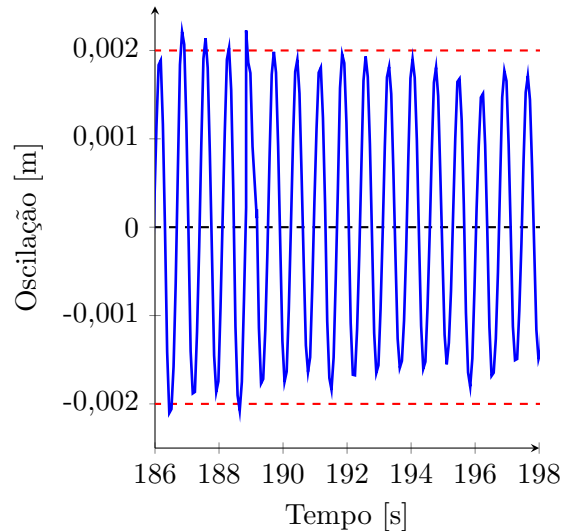


Figura 3: (B) Oscilação de $x_1(t)$ obtida pelo Tracker nos instantes finais do tempo.



CONCLUSÕES

Neste trabalho foi feita a análise de um pêndulo simples mediante investigação do modelo matemático e da experimentação prática. O software Tracker foi usado para a análise do movimento do pêndulo do experimento. A partir dos dados experimentais obtidos, foi apresentado um algoritmo para estimar o coeficiente de atrito do modelo. Nas simulações realizadas em MATLAB, com o uso do coeficiente calculado no algoritmo, verificou-se que os resultados obtidos ficaram próximos ao experimento realizado, indicando uma boa estimativa do valor do parâmetro do modelo. As variações do coeficiente de atrito para diferentes valores de condições iniciais podem se justificar pela diferença entre o modelo linear utilizado na representação do sistema ou pela precisão dos dados obtidos no experimento, mas

outras hipóteses também podem ser investigadas, como considerar este parâmetro variante no tempo. Estudos futuros, preveem a realização do experimento com maior precisão, considerar e testar diferentes variações no modelo matemático e realizar estudos teórico-práticos de outros modelos de pêndulo da literatura.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

G. S. T. contribuiu com o desenvolvimento do estudo teórico, montagem do sistema físico e realização dos experimentos. L. J. E. contribuiu com a concepção do tema investigado, orientações e correções nos estudos teórico-práticos realizados. Ambos autores contribuíram na escrita do trabalho, nas implementações e simulações em software apresentadas. Todos os autores contribuíram com a revisão do trabalho e aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao IFSP e CNPq pelo suporte financeiro, referente a bolsa PIBIC, para realização deste projeto.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

HAZEM, Z. B.; BINGÜL, Z. Comprehensive review of different pendulum structures in engineering applications. **IEEE Access**, v. 11, 2023.

KELLEY, W. G.; PETERSON, A. C. **The theory of differential equations classical and qualitative**. 2. ed. New York: Springer, 2010.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

MOREIRA, J. P. de S. et al. Estudo e modelagem de um pêndulo simples através de equações diferenciais e análise de vídeo assistida por computador. **Revista Acadêmica – Ensino de Ciências e Tecnologias – IFSP, Campus Cubatão**, Qualif [Online], v. 5, n. 5, p. 37–58, 2019. Acessado em 21/07/25. Disponível em: <<https://intranet.cbt.ifsp.edu.br/qualif/anteriores.html>>.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

TAVARES, G. S.; ELIAS, L. J. Análise de um sistema massa-mola amortecido com não linearidade na força restauradora da mola. In: **Anais do XI Congresso de Iniciação Científica do IFSP Itapetininga**. Itapetininga: IFSP, 2025. Acessado em 21/07/25. Disponível em: <<https://eventosacademicos.itp.ifsp.edu.br/index.php/ic/article/view/104/46>>.

UTFPR. **Tracker Brasil**. 2016. Acessado em 28/08/25. Disponível em: <<https://utfpr.curitiba.br/trackerbrasil/>>.

WANG, T. Pendulum-based vibration energy harvesting: Mechanisms, transducer integration, and applications. **Energy Conversion and Management**, v. 276, 2023.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.