

16º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2025

NÚMEROS COMPLEXOS, SUA RELAÇÃO COM AS EQUAÇÕES CÚBICAS E SUA APLICAÇÃO NA TEORIA DE CIRCUITOS DE CORRENTE ALTERNADA

PEDRO H. S. COSTA¹, EDER F. PRADO²

¹Aluno do curso Técnico Integrado em Mecatrônica, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Campus Votuporanga, pedro.sales@aluno.ifsp.edu.br.

²Mestre em Matemática, Professor, IFSP, Campus Votuporanga, eder.prado@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.01.00-4 Álgebra

RESUMO: Este artigo apresenta a correlação entre conteúdos de Física desenvolvidos em disciplinas introdutórias de Circuitos Elétricos em Corrente Alternada — presentes em cursos técnicos nas áreas de mecatrônica, eletrônica e eletrotécnica, bem como em cursos superiores de engenharia e física — e a teoria algébrica dos Números Complexos. Propõe-se uma forma mais significativa de introduzir essa teoria matemática, articulando-a às equações cúbicas e ao contexto histórico de seu surgimento. Além disso, discute-se a relação entre Matemática e Física, argumentando que o domínio prévio e sólido da teoria algébrica favorece uma aprendizagem conceitual mais profunda de corrente alternada. Por fim, sustenta-se que o estudo desses fenômenos físicos pode, por sua vez, reforçar a compreensão dos Números Complexos. Essa abordagem promove maior integração entre as disciplinas, por meio da formulação de problemas matemáticos que reflitam a estrutura e os desafios da corrente alternada, incentivando o rigor teórico e a conexão entre abstração e aplicação prática.

PALAVRAS-CHAVE: números complexos; equações do terceiro grau; circuitos elétricos; corrente alternada.

COMPLEX NUMBERS, THEIR RELATIONSHIP WITH CUBIC EQUATIONS, AND THEIR APPLICATION IN ALTERNATING CURRENT CIRCUIT THEORY

ABSTRACT: This article presents the correlation between Physics topics developed in introductory courses on Alternating Current Electrical Circuits — offered in technical programs in mechatronics, electronics, and electrotechnics, as well as in undergraduate engineering and physics programs — and the algebraic theory of Complex Numbers. It proposes a more meaningful way of introducing this mathematical theory by linking it to cubic equations and the historical context of its emergence. Furthermore, it discusses the relationship between Mathematics and Physics, arguing that a solid prior understanding of algebraic theory fosters a deeper conceptual learning of alternating current. Finally, it is argued that the study of these physical phenomena can, in turn, reinforce the understanding of Complex Numbers. This approach promotes greater integration between disciplines by formulating

mathematical problems that reflect the structure and challenges of alternating current, encouraging theoretical rigor and a connection between abstraction and practical application.

KEYWORDS: complex numbers; equations of the third degree; electric circuits; alternating current.

INTRODUÇÃO

São diversas as aplicações dos Números Complexos e das Funções Trigonométricas na descrição de fenômenos físicos periódicos e oscilatórios. Ambos os conceitos matemáticos encontram-se definidos formalmente em obras como IEZZI (2005a, 2005b). Na eletrodinâmica, eles são utilizados para descrever a corrente alternada.

Ocorre que, em muitos dos cursos introdutórios que abordam esse assunto, Números Complexos são apresentados como meras ferramentas algébricas com certas regras operacionais e sem formalização teórica, comprometendo uma compreensão conceitual mais profunda do tema. Assim, possuir uma compreensão matemática pode favorecer um entendimento mais profundo dos conceitos e aplicações físicas utilizados no curso (MELTZER, 2002). Além disso, considera-se que o estudo e o contato com a aplicação de conceitos matemáticos no cotidiano e em situações reais, em disciplinas aplicadas, caracterizam uma aprendizagem significativa, conforme definida por Ausubel (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

Quanto ao estudo da teoria matemática, há indícios na literatura de que uma abordagem histórica pode favorecer uma compreensão conceitual mais profunda em comparação àquela convencionada pelos livros didáticos (KATZ, 1986). Nesse sentido, apresentar os Números Complexos por meio de sua história, conectando-os às equações cúbicas e aos diversos contextos históricos de seu desenvolvimento, pode ser demasiado promissor para o aprendizado do estudante.

MATERIAIS E MÉTODOS

Foram consultadas obras consagradas na área da matemática elementar e educação, como os volumes 3 e 6 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, de Gelson Iezzi, que abordam, respectivamente, Trigonometria e os temas de Números Complexos, Polinômios e Equações, e o livro Psicologia Educacional, de David Ausubel e outros autores.

Além disso, foi utilizado o livro Análise de Circuitos em Corrente Alternada, de Rômulo Albuquerque, com o objetivo de explorar a aplicação dos números complexos nos contextos da física e da engenharia elétrica.

Complementarmente, foram analisados diversos artigos científicos nas áreas de matemática, engenharia e educação matemática, contemplando tópicos como números complexos, equações cúbicas, história da matemática e corrente alternada.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com a investigação histórica, percebeu-se que os primórdios do que hoje chamamos de Números Complexos surgiram em um contexto de disputa entre proeminentes matemáticos da Renascença italiana (BOYER, 2012). Observou-se, ainda, uma forte relação entre esse surgimento e a resolução das equações cúbicas, cuja fórmula geral teve de ser descoberta — por Scipione del Ferro — e posteriormente redescoberta por Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia, num contexto em que já se

suspeitava de sua existência, embora não se conhecesse sua forma, até finalmente ser publicada por Girolamo Cardano em sua obra *Ars Magna*, no ano de 1545 (LIMA, 1987).

A seguir, a fórmula que passou a ser conhecida, então, como "Fórmula de Cardano":

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1)$$

em que,

x - raiz da equação cúbica $x^3 + px + q = 0$;

p, q - coeficientes reais da equação cúbica;

Acontece que toda equação do terceiro grau possui, necessariamente, ao menos uma raiz real, podendo apresentar uma, duas ou três raízes reais, conforme o discriminante $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ seja positivo, nulo ou negativo, respectivamente.

Assim, mesmo nos casos em que surgem raízes quadradas de números negativos, é por meio delas que se determina a(s) raiz(es) real(is) da equação.

Coube a Rafael Bombelli, autor de um conjunto de três livros intitulado *L'Algebra* (1572-1579), introduzir a notação $\sqrt{-1}$ e discutir extensivamente o caso irredutível (MERINO, 2006).

Muitos outros importantes matemáticos contribuíram para a teoria algébrica dos Números Complexos ao longo da história. Entre eles, Abraham de Moivre e Carl Gauss — este último introduziu o termo “números complexos” (MERINO, 2006). Certamente, um dos nomes mais importantes e decisivos no assunto foi Euler, que introduziu a notação $i = \sqrt{-1}$ (ou $i^2 = -1$) e definiu as exponenciais complexas (CERRI; MONTEIRO, 2001).

Num contexto de apresentação histórica e matemática das equações cúbicas, o autor afirma que "É pedagogicamente melhor seguir esse desenvolvimento histórico e introduzir os números complexos neste ponto, em vez de como soluções de certas equações quadráticas, porque aqui se sabe que necessariamente há uma solução." (KATZ, 1986, p. 13, tradução nossa)¹. Essa parece, de fato, a apresentação lógica dos conceitos e da origem dos números complexos, e deve levar o aluno a uma compreensão mais profunda da teoria matemática, bem como do desenvolvimento da ciência, quando comparada à apresentação tradicional dos números complexos, por meio de definições e regras, somente.

Ademais, ao seguir a proposta de Katz, o aluno é apresentado aos números complexos de modo a relacioná-los imediatamente a um conhecimento prévio — embora recentemente adquirido —, o das equações cúbicas. Isso configura precisamente o que se denomina aprendizagem significativa, na qual novas informações são conectadas a conceitos relevantes que o aluno já conhece (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). O mesmo ocorre ao introduzir a corrente alternada quando o aluno já domina a teoria dos números complexos, ainda que em nível elementar.

De acordo com Meltzer (2002, p. 1259) (tradução nossa), "Os ganhos normalizados de aprendizagem dos estudantes não se correlacionam de forma significativa com seus desempenhos no teste conceitual de física aplicado antes da instrução; [...] [por outro lado], observa-se uma correlação significativa entre o ganho normalizado de aprendizagem e a habilidade matemática prévia dos estudantes."², em que o ganho normalizado é o ganho absoluto dividido pelo máximo ganho possível, calculado a partir de testes aplicados antes e depois de um curso de física. Nesta pesquisa, Meltzer identificou que,

¹"It is pedagogically better to follow this historical development and introduce complex numbers here rather than as solutions to certain quadratic equations, because here you know there must be a solution." (KATZ, 1986).

²"students' normalized learning gains are not significantly correlated with their pretest scores on a physics concept test, [...] [but], there is a significant correlation between normalized learning gain and students' preinstruction mathematics skill."

estatisticamente, os alunos com melhor desempenho no teste de matemática aplicado no início do curso foram também aqueles que apresentaram maior ganho normalizado, isto é, apresentaram um avanço conceitual mais significativo no curso de física, em aproximadamente 75% dos casos analisados. Nota-se, assim, a relação entre o conhecimento prévio em matemática e a formulação e compreensão da teoria física, como, por exemplo, os conceitos envolvendo corrente alternada. Isso evidencia, ainda, a necessidade da manutenção integral e até do aprimoramento do conteúdo sobre números complexos ensinado aos alunos durante o Ensino Médio.

No contexto da Corrente Alternada (CA, ou Alternating Current – AC), os números complexos são amplamente utilizados para facilitar os cálculos matemáticos envolvidos na análise de circuitos. Isso se deve à sua eficiência na descrição de fenômenos oscilatórios e periódicos, como o sinal senoidal da tensão alternada.

A tensão alternada típica é representada graficamente por uma senoide, possuindo valores máximos positivos e negativos denominados tensão de pico (V_p). Essa tensão pode ser expressa nos domínios temporal ou angular, por meio das seguintes funções:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t) \qquad v(\theta) = V_p \cdot \text{sen}(\theta) \qquad (2)$$

Onde:

$v(t)$ ou $v(\theta)$ - valor da tensão no instante t ou para o ângulo θ (em V)

V_p - valor de pico ou amplitude máxima da tensão (em V)

ω - frequência angular (em rad/s)

θ - ângulo (em rad)

No entanto, nem sempre o sinal senoidal inicia seu ciclo em $t = 0$ s. Nesses casos, é necessário considerar a fase inicial (θ_0), o que leva à forma mais geral da função:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad (3)$$

Outra maneira de representar o sinal é por meio de um fasor com a mesma amplitude do valor de pico (V_p), sentido de giro anti-horário e velocidade angular ω . Como os números complexos também têm módulo e ângulo, esta é outra possível representação do sinal senoidal, sendo correspondentes a amplitude e fase inicial, respectivamente.

$$v = V_p(\cos \theta_0 + i \text{sen} \theta_0) = V_p \angle \theta_0^\circ \qquad (4)$$

Enquanto a função trigonométrica apresenta todos os detalhes do sinal no tempo, os números complexos apresentam as informações de maneira simplificada, matematicamente, facilitando os cálculos e a análise conceitual, além de evitar o uso de identidades trigonométricas (ALBUQUERQUE, 2012).

O estudo desses conceitos físicos constitui uma forma apropriada e coerente de evidenciar ao estudante a relevância da teoria algébrica dos números complexos, bem como suas aplicações práticas na engenharia e em fenômenos do mundo real.

CONCLUSÕES

A teoria algébrica dos Números Complexos, em sua apresentação tradicional axiomática, caracteriza-se por ser uma formulação tanto abstrata quanto pouco operativa para o aluno que a estuda pela pri-

meira vez. No entanto, uma abordagem histórica — como a proposta neste trabalho — pode favorecer uma aprendizagem mais significativa. Ademais, a estreita relação entre os Números Complexos e a teoria física da corrente alternada contribui para tornar os conceitos matemáticos mais inteligíveis a posteriori, ao mesmo tempo em que promove uma compreensão conceitual mais sólida dos fundamentos físicos. Destaca-se, ainda, a necessidade de um conhecimento sólido em matemática anterior ao estudo físico conceitual.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

P.H.S.C realizou a pesquisa e a leitura dos materiais. E.F.P orientou e supervisionou o projeto. Todos os autores contribuíram com a revisão do trabalho e aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao IFSP e ao programa PIBIFSP pelo apoio e incentivo financeiro. Agradeço ao Prof. Orientador pelas valiosas discussões conceituais e pela orientação durante o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, R. O. *Análise de Circuitos em Corrente Alternada*. 2. ed. São Paulo: Érica, 2012.
- AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia Educacional*. 1. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blücher, 2012.
- CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. *História dos Números Complexos*. 2001. [material didático]. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>>.
- IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios, equações*. 7. ed. [S.l.]: Atual, 2005a.
- IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar, 3: trigonometria*. 7. ed. [S.l.]: Atual, 2005b.
- KATZ, V. J. Using history in teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics*, v. 6, n. 3, p. 13–19, Nov. 1986. Disponível em: <<https://www.flm-journal.org/Articles/38BB57152440074E85F96C9121D413.pdf>>.
- LIMA, E. L. A equação do terceiro grau. *Matemática Universitária*, n. 5, p. 9–23, Jun. 1987. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo01.pdf>.
- MELTZER, D. The relationship between mathematics preparation and conceptual learning gains in physics: A possible “hidden variable” in diagnostic pretest scores. *American Journal of Physics*, v. 70, p. 1259–1268, Dec. 2002. Disponível em: <<https://physicseducation.net/docs/AJP-Dec-2002-Vol.70-1259-1268.pdf>>.
- MERINO, O. *A Short History of Complex Numbers*. 2006. [manuscrito]. Disponível em: <<https://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf>>.