

16º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2025

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE SISTEMAS AEROELÁSTICOS NÃO LINEARES

KAYKY S. CORRÊA¹, ANDREIA R. S. SALDANHA²

¹ Graduando em Engenharia Aeronáutica, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Campus São Carlos, kayky.correa@aluno.ifsp.edu.br.

² Professora EBT, Orientadora PIBIFSP, IFSP, Campus São Carlos, asimoni@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.03.04-0 Sistemas Dinâmicos

RESUMO: O presente projeto busca investigar o comportamento de sistemas aeroelásticos não lineares, cuja análise se mostra necessária para o desenvolvimento de aeronaves mais leves, rápidas e seguras. Esses sistemas envolvem interações complexas entre forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas, podendo apresentar instabilidades como flutter, divergência, oscilações em ciclo limite e movimentos caóticos. Para a elaboração deste trabalho, foram realizadas revisões teóricas sobre dinâmica não linear e modelagem de sistemas aeroelásticos, com ênfase na formulação de equações diferenciais ordinárias e na análise qualitativa de seus comportamentos. Em seguida, estudaram-se métodos numéricos, como Euler e Runge-Kutta, bem como ferramentas de análise dinâmica, incluindo expoentes de Lyapunov, seções de Poincaré e retratos de fase, os quais permitem identificar tipos de equilíbrio e caracterizar trajetórias em diferentes regimes dinâmicos. Essas técnicas foram implementadas em ambiente MATLAB, resultando em um código interativo capaz de simular sistemas contínuos e discretos com flexibilidade de configuração. As próximas etapas contemplam a validação com modelos clássicos da literatura e a aplicação do código à análise de séries temporais experimentais reais.

PALAVRAS-CHAVE: Flutter; Sistemas Aeroelásticos; Dinâmica não linear; Métodos Numéricos; Expoentes de Lyapunov; MATLAB.

NUMERICAL METHODS FOR THE ANALYSIS OF NONLINEAR AEROELASTIC SYSTEMS

ABSTRACT: The present project aims to investigate the behavior of nonlinear aeroelastic systems, whose analysis is necessary for the development of lighter, faster, and safer aircraft. These systems involve complex interactions among aerodynamic, inertial, and elastic forces, and may exhibit instabilities such as flutter, divergence, limit cycle oscillations, and chaotic motion. For the development of this work, theoretical reviews were conducted on nonlinear dynamics and the modeling of aeroelastic systems, with an emphasis on the formulation of ordinary differential equations and the qualitative analysis of their behavior. Subsequently, numerical methods such as Euler and Runge-Kutta were studied, as well as dynamic analysis tools including Lyapunov exponents, Poincaré sections, and phase portraits, which allow for the identification of equilibrium types and the characterization of trajectories across different dynamic regimes. These techniques were implemented in a MATLAB environment, resulting in an interactive code capable of simulating continuous and discrete systems with flexible configuration. The next stages include validation with classical models from the literature and the application of the code to the analysis of real experimental time series.

KEYWORDS: Flutter; Aeroelastic Systems; Nonlinear Dynamics; Numerical Methods; Lyapunov Exponents; MATLAB.

INTRODUÇÃO

Os sistemas aeroelásticos caracterizam-se pela interação entre forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas que atuam sobre estruturas flexíveis submetidas a escoamentos de ar. Essa interação pode gerar instabilidades, como a divergência e o flutter, cujas manifestações dependem de diversos fatores estruturais e aerodinâmicos. Com o avanço tecnológico e a busca por aeronaves mais leves, rápidas e seguras, tornou-se evidente a necessidade de se considerar os efeitos não lineares nesses sistemas.

Historicamente, o tratamento linear da aeroelasticidade foi muito utilizado, mas mostrou-se falho diante da crescente complexidade das aeronaves modernas, sobretudo em regimes de voo transônicos e supersônicos. Fenômenos como o flutter não linear, as oscilações em ciclo limite (LCO), os movimentos caóticos e as instabilidades induzidas por folgas ou histerese não podem ser adequadamente previstos por modelos lineares tradicionais (BISPLINGHOFF et al., 1996; DOWELL, 2015).

A resposta aeroelástica não linear pode ser classificada em quatro modos principais: o flutter, uma oscilação autossustentada que ocorre a partir de uma velocidade crítica (SIMONI, 2008); a divergência, uma instabilidade estática com deflexões crescentes (BISPLINGHOFF et al., 1996); as LCOs, com periodicidade e amplitudes constantes (ALONSO; JAMESON, 1994); e os movimentos caóticos, com oscilações imprevisíveis e alta sensibilidade às condições iniciais (MARQUES et al., 2003).

Diante desse cenário, este projeto surgiu da necessidade de compreender os fenômenos não lineares e desenvolver programas computacionais para sua análise. Assim, busca-se empregar métodos numéricos para resolver as equações diferenciais não lineares que descrevem os sistemas aeroelásticos. Por meio dessas técnicas, espera-se simular, identificar e classificar as instabilidades, fornecendo subsídios técnicos para o aprimoramento de estratégias de controle aplicadas à engenharia aeronáutica.

MATERIAL E MÉTODOS

Esta pesquisa adotou uma metodologia voltada à investigação, por meio de métodos numéricos, do comportamento de sistemas aeroelásticos não lineares. O estudo teve início com uma revisão bibliográfica aprofundada sobre dinâmica não linear e técnicas clássicas de análise aeroelástica. Essa etapa teórica serviu de alicerce para a compreensão dos principais fenômenos de instabilidade e para a formulação matemática dos modelos adotados.

Na sequência, os sistemas dinâmicos envolvidos foram modelados por equações diferenciais ordinárias (EDOs), considerando-se sistemas de primeira ordem e equações acopladas, seguidos de uma análise qualitativa dos pontos de equilíbrio por meio da matriz Jacobiana. Esses conceitos permitiram classificar os pontos críticos em nós, focos e centros, de acordo com a natureza de suas raízes.

Com base nessa modelagem, exploraram-se métodos numéricos para a resolução aproximada das EDOs, com destaque para os de Euler e Runge-Kutta, reconhecidos por sua ampla aplicação na simulação de sistemas não lineares. Para possibilitar a identificação dos distintos regimes dinâmicos, também foram incorporadas ferramentas de análise como retratos de fase, seções de Poincaré e o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Toda a implementação foi realizada na plataforma MATLAB, disponível no IFSP por meio da licença institucional Campus-Wide License (CWL) da MathWorks, o que possibilitou o desenvolvimento de um código interativo, capaz de simular sistemas contínuos e discretos com interface de entrada personalizável. O script permite alterar parâmetros iniciais, selecionar métodos de integração e gerar visualizações gráficas automáticas, facilitando a interpretação dos regimes dinâmicos. Essa estrutura será utilizada nas próximas etapas do projeto, que envolvem a validação do código com modelos da literatura e sua aplicação na análise de séries temporais experimentais reais.

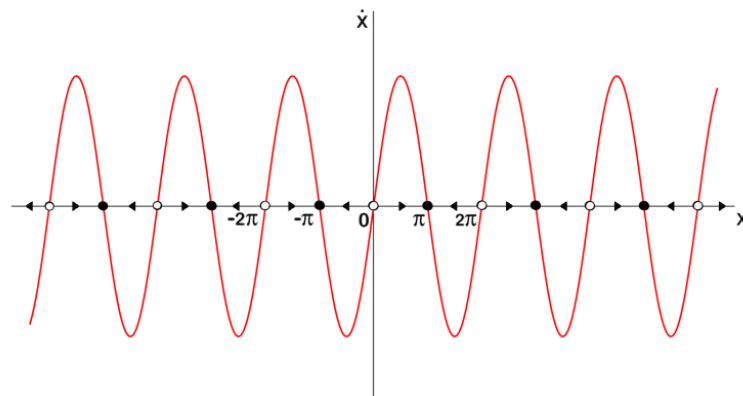
RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os primeiros resultados do estudo concentraram-se na classificação e análise qualitativa de sistemas dinâmicos modelados por equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem. A estrutura geral adotada para representar tais sistemas foi:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Para os sistemas unidimensionais, realizou-se a análise qualitativa a partir da inspeção do campo vetorial associado. Como exemplo, o sistema $\dot{x} = \sin(x)$, ilustrado na Figura 1, permitiu identificar pontos de equilíbrio atratores, repulsores e semiestáveis, definidos conforme o sinal da derivada da função.

FIGURA 1. Campo vetorial para o sistema $\dot{x} = \sin(x)$



Fonte: Onias, 2012, p. 3

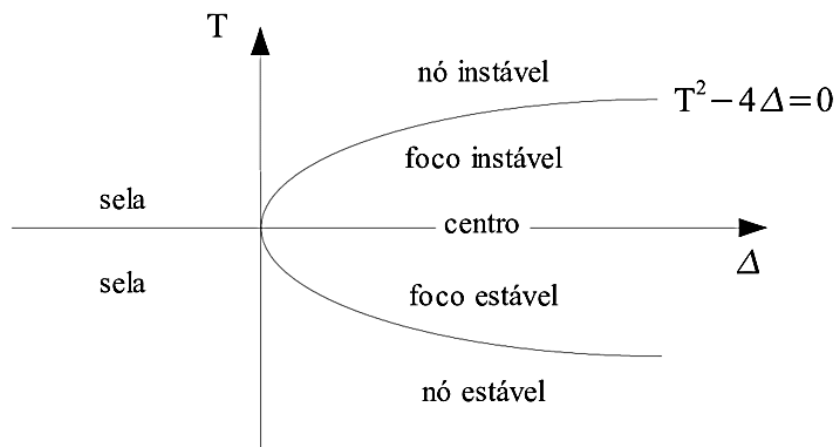
Para os sistemas bidimensionais, as equações foram estendidas para:

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

A análise local em torno dos pontos de equilíbrio foi conduzida por meio da matriz Jacobiana do sistema. A partir dos sinais do traço T e do determinante Δ , foi possível classificar os pontos como nós, focos, centros ou selas, conforme ilustrado no diagrama traço-determinante da Figura 2.

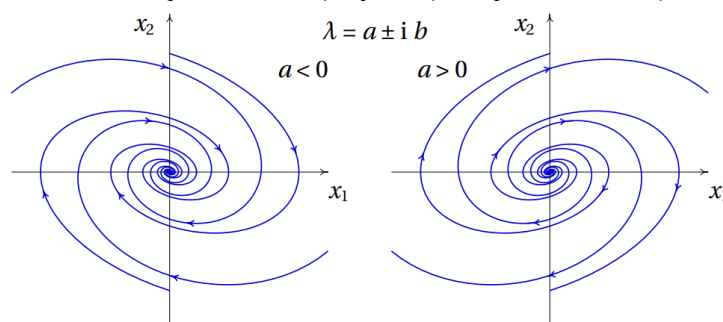
FIGURA 2. Diagrama de pontos fixos de um sistema bidimensional



Fonte: Monteiro, 2002, p. 93

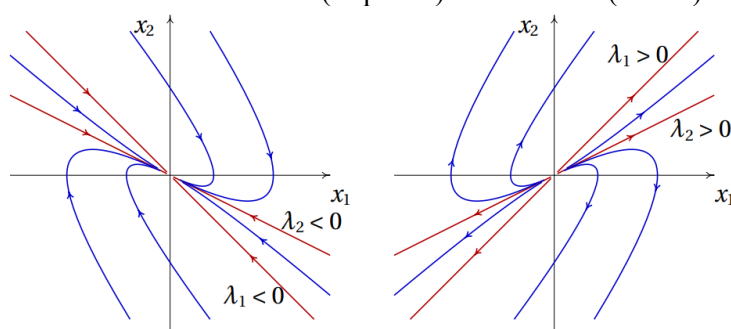
Esse diagrama permite distinguir entre espirais estáveis, espirais instáveis, centros, nós e pontos de sela, levando em conta os sinais de T , Δ e a condição discriminante $T^2 - 4\Delta$. A Figura 3 apresenta dois exemplos típicos de espirais, enquanto a Figura 4 ilustra casos de nós estáveis e instáveis.

FIGURA 3. Espiral estável (esquerda) e espiral instável (direita)



Fonte: Villate, 2019, p. 248

FIGURA 4. Nó estável (esquerda) e nó instável (direita)



Fonte: Villate, 2019, p. 247

Compreendidos os aspectos qualitativos, passou-se ao estudo de métodos numéricos para a solução aproximada das EDOs. Foram implementados e testados os métodos de Euler, Runge-Kutta de segunda ordem e Runge-Kutta de quarta ordem. O método de Euler, embora simples, demonstrou limitações de precisão, especialmente em sistemas sensíveis às condições iniciais. Em contrapartida, os métodos de Runge-Kutta, especialmente o de quarta ordem, revelaram maior robustez e acurácia.

A seguir, apresenta-se a formulação geral implementada para o método de quarta ordem:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Com base nessas formulações, foi desenvolvido um código computacional em MATLAB, capaz de simular sistemas contínuos e discretos. A interface do programa, apresentado na Figura 5, permite ao usuário configurar a equação do sistema, selecionar os parâmetros de simulação e o método numérico a ser utilizado.

FIGURA 5. Interface de entrada de dados e parâmetros no código MATLAB

```
===== MENU PRINCIPAL =====
1 - Equação Diferencial Ordinária (ODE)
2 - Sequência de números (mapa discreto)
Escolha o modo de análise (1 ou 2): 1
Exemplos de entrada para a função sistema:
1D: @(t,y) 0.04*y(1)
2D: @(t,y) [y(2); -y(1)]
Digite sua função sistema f(t,y): @(t,y) [10*(y(2) - y(1)); y(1)*(28 - y(3)) - y(2); y(1)*y(2) - (8/3)*y(3)]
Tempo inicial t0 = 0
Tempo final tf = 100
Passo de integração h = 0.01
Condição inicial y0 (vetor coluna) = [1; 1; 1]

Método de integração numérica:
1 - Euler
2 - Runge-Kutta de 2ª ordem
3 - Runge-Kutta de 4ª ordem
Escolha o método (1,2 ou 3): 3
```

Fonte: Autoria Própria

Ao término da simulação, o programa fornece como saída os retratos de fase, a evolução temporal das variáveis, as seções de Poincaré e, quando solicitado, o cálculo dos expoentes de Lyapunov. Tais recursos possibilitam a identificação de regimes estáveis, instáveis e caóticos, alinhados aos comportamentos previstos na teoria dos sistemas dinâmicos.

Assim, os resultados obtidos confirmam a consistência metodológica da investigação e oferecem subsídios relevantes para a continuidade da pesquisa.

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos demonstram que a formulação matemática, aliada à análise qualitativa e à implementação computacional, foi adequada para caracterizar o comportamento de sistemas aeroelásticos não lineares. A distinção entre regimes estáveis, instáveis e caóticos foi viabilizada pela análise do campo vetorial, da matriz Jacobiana e das simulações numéricas realizadas com os métodos de Euler e Runge-Kutta.

O programa desenvolvido em MATLAB mostrou-se versátil e funcional, permitindo a configuração de diferentes sistemas, a geração automática de representações gráficas e o cálculo de indicadores como os expoentes de Lyapunov e as seções de Poincaré. Esses recursos atenderam aos objetivos propostos e estabeleceram uma base sólida para as próximas etapas da pesquisa, que envolvem a validação com modelos aeroelásticos clássicos e a aplicação à análise de dados experimentais reais.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

K.S.C. contribuiu na revisão bibliográfica sobre dinâmica não linear e aeroelasticidade, na formulação matemática dos modelos, na implementação computacional em MATLAB, na simulação dos sistemas e na elaboração do relatório técnico. A.R.S.S. orientou o projeto desde sua concepção, auxiliando na definição dos objetivos e metodologia, além de realizar a leitura e revisão crítica do trabalho escrito.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo pelo apoio financeiro no desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ALONSO, J.; JAMESON, A. Fully-implicit time-marching aeroelastic solutions. In: **32nd AIAA Aerospace Sciences**. 10-13 January, 1994.

BARREIRA, L.; VALLS, C. **Equações Diferenciais Ordinárias: Teoria Qualitativa**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

BISPLINGHOFF, R.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. **Aeroelasticity**. New York: Dover, 1996.

DOWELL, E. H. **A Modern Course in Aeroelasticity**. Cham: Springer, 2015.

LITTLEFIELD, B.; HANSELMAN, D. **Matlab 6: curso completo**. São Paulo: Editora Pearson, 2002.

MARQUES, F.; ROSOLEN, J.; OLIVEIRA, V.; BELO, E. Non-linear analysis of stall-induced oscillations of an aeroelastic wing. In: **2º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC**. Rio Claro – SP, 2003.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 1ed. São Paulo: Livraria da Física, 2002.

ONIAS, H. H. S. **Bifurcações dinâmicas em circuitos eletrônicos**. 2012. Dissertação (Mestrado em Física) – Centro de Ciência Exatas e da Natureza, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

SIMONI, A. R. **Análise de séries temporais aeroelásticas experimentais não lineares**. 2008. Tese (Doutorado em Aeronaves) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

STROGATZ, S. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. 2 ed. 2014.

VILLATE, J. E. **Dinâmica e sistemas dinâmicos**. 5 ed. 2019. Disponível em: [https://villate.org/publications/Villate 2019 Dinamica.pdf](https://villate.org/publications/Villate%202019%20Dinamica.pdf). Acesso em: 8 abr. 2025.