

16º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2025

Estudo da ressonância em um sistema massa-mola amortecido com uso de Arduino.

KAIO SANTOS BRAGA¹, CARLOS ANTONIO DA ROCHA²

¹ Graduando em Engenharia Eletrônica, Bolsista CNPq, IFSP, Campus São Paulo, kaio.braga@aluno.ifsp.edu.br

² Doutor, Professor EBT, IFSP Campus São Paulo, carlosrocha@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 7.08.04.03-6 Tecnologia Educacional

RESUMO: É um desafio conhecido a dificuldade que muitos alunos encontram para compreender os fenômenos físicos. Uma proposta para enfrentar esse desafio é o uso crescente e diversificado dos experimentos de laboratório, sejam estes realizados "ao vivo" ou simulados no computador, tendo como fundo a metodologia da aprendizagem ativa. Este projeto se propõe a elaborar um kit de orientação para a construção de um experimento apropriado para as aulas de laboratório nos cursos de graduação. O experimento baseia-se em oscilações forçadas amortecidas de um sistema massa-mola, acoplado a um motor que fornece vibração mecânica externa e variável no ponto de fixação da mola, cujo controle é fornecido por um sistema baseado na interface Arduino. Para obter a frequência da mola, é utilizado um sensor ultrassônico HCSR04. Para medir a frequência do motor, emprega-se um sensor infravermelho FC33. O atrito no ar é amplificado pelo acoplamento de um disco CD, perpendicular ao movimento. As oscilações são monitoradas para localizar a frequência de ressonância e compará-la com o resultado teórico. O objetivo principal é oferecer a possibilidade aos alunos de observar o fenômeno da ressonância em um sistema mecânico, através da implementação do kit e da construção do aparato.

PALAVRAS-CHAVE: oscilador harmônico; oscilador forçado; ressonância; aprendizagem ativa; Física experimental; aquisição automática de dados.

Study of resonance in a damped mass-spring system using Arduino.

ABSTRACT: It is a well-known challenge that many students find it difficult to understand physical phenomena. One proposal to address this challenge is the increasing and diversified use of laboratory experiments, whether conducted "live" or simulated on a computer, based on active learning methodology. This project aims to develop a guidance kit for constructing an experiment suitable for laboratory classes in undergraduate courses. The experiment is based on damped forced oscillations of a mass-spring system, coupled to a motor that provides external and variable mechanical vibration at the spring's attachment point, which is controlled by a system based on the Arduino interface. An HCSR04 ultrasonic sensor is used to obtain the spring frequency. An FC33 infrared sensor is used to measure the motor frequency. Air friction is amplified by coupling a CD disc perpendicular to the movement. The oscillations are monitored to locate the resonance frequency and compare it with the theoretical result. The main objective is to offer students the opportunity to observe the phenomenon of resonance in a mechanical system through the implementation of the kit and construction of the apparatus.

KEYWORDS: harmonic oscillator; driven oscillator; resonance; active learning; experimental Physics; automatic data acquisition.

INTRODUÇÃO

O Movimento Harmônico Simples (MHS) e a ressonância são fenômenos físicos fundamentais, com grande relevância em contextos acadêmicos e tecnológicos (Young et. al, 2015). Apesar disso, a

abstração conceitual e a limitação de recursos práticos tornam difícil sua compreensão no ensino médio e superior, prejudicando o engajamento dos estudantes (Bender, 2014). Para enfrentar esse desafio, este trabalho propõe o desenvolvimento de um kit experimental de baixo custo, baseado em Arduino, que permita observar e analisar de forma quantitativa o comportamento oscilatório e os efeitos da ressonância mecânica. Inserido na perspectiva da Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP), o uso do Arduino favorece a construção ativa do conhecimento ao possibilitar a coleta automatizada e precisa de dados experimentais (Bender, 2014). A escolha da plataforma Arduino se justifica por sua acessibilidade, flexibilidade e ampla aplicação no ensino de ciências, como demonstrado por estudos que abordam seu uso em atividades investigativas (Silva; Ribeiro, 2019). Além disso, a proposta visa preencher lacunas na oferta de recursos didáticos acessíveis para a análise da ressonância (Pereira; Lima, 2021). As hipóteses centrais deste estudo são que o kit permitirá a observação clara e mensurável dos fenômenos de MHS e ressonância, e que o uso do Arduino será mais eficiente e acurado que métodos manuais. O objetivo geral é projetar, construir e avaliar um kit que auxilie no ensino de Física, tornando os conceitos mais concretos e promovendo a aprendizagem ativa e significativa.

MATERIAIS E MÉTODOS

Este trabalho se propõe a elaborar um kit experimental, que irá oferecer a possibilidade de observação do fenômeno da ressonância em um sistema mecânico, através de um sistema massa-mola de oscilações amortecidas e com uma força externa periódica. O desenvolvimento do kit tem início a partir de revisões bibliográficas referentes a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP). A ABP é uma metodologia ativa na qual o aluno aprende por meio de sua participação na elaboração de um projeto, baseado em situações cotidianas, cujo objetivo é proporcionar um tópico de investigação e aprofundamento de conceitos acadêmicos teóricos em contextos práticos (Barbosa; Moura, 2013). O desenvolvimento do conhecimento em uma ABP é feito, geralmente, por meio do estudo e da apresentação de um aparato experimental dentro do ambiente escolar. Nesse sentido, a metodologia adotada para a elaboração do kit seguiu de perto o trabalho de Bender (2014), para o qual, os elementos essenciais da ABP para a construção do projeto são definidos pelas seguintes etapas:

- Um problema presente na realidade dos alunos, porém não muito simples;
- Os alunos devem ter momentos de tomadas de decisões no decorrer no projeto;
- Estimular o desenvolvimento de competências para o trabalho cooperativo;
- Discussão e reflexão entre os alunos referente às informações coletadas;
- Revisão e crítica por parte dos alunos, onde os alunos são estimulados a revisar e analisar o projeto e determinar se as informações são coerentes e se são úteis à pesquisa;
- Envolvimento dos alunos nas pesquisas, para achar a solução para o problema proposto;
- Apresentar para o público os artefatos produzidos.

A ABP pode ser dividida em duas etapas: pré-planejamento, realizado pelo professor, e planejamento, conduzido pelos alunos. No pré-planejamento, o professor define a âncora e a questão motriz (que, em alguns casos, pode ser escolhida pelos alunos), identifica as unidades curriculares envolvidas e organiza os conteúdos que serão trabalhados. Também verifica a disponibilidade de recursos tecnológicos e elabora um guia com a âncora, a questão motriz, perguntas iniciais, objetivos, fontes recomendadas e os artefatos esperados. No planejamento, os alunos decidem como será a divisão do tempo entre as etapas e conduzem o desenvolvimento do projeto.

Para a elaboração do projeto do kit, o objetivo é transmitir aos alunos o conhecimento sobre a Física do Movimento Harmônico, focando nos conceitos envolvidos em um sistema massa-mola sujeito a amortecimento e a uma força externa. A análise do movimento baseia-se em princípios fundamentais que podem ser descritos por equações diferenciais.

O sistema a ser estudado é composto por uma massa acoplada a uma mola e a um mecanismo de amortecimento e impulsionado por uma força externa controlada por um motor. Com base nesses fundamentos, a etapa seguinte consistiu na apresentação dos conceitos físicos relacionados ao sistema massa-mola com amortecimento e excitação externa periódica. A modelagem do sistema pode ser realizada por meio da segunda lei de Newton, a qual leva à equação diferencial do sistema massa-mola amortecido, conforme a Eq. (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = 0 \quad (1)$$

onde m é a massa do corpo; b é o coeficiente de amortecimento viscoso e k é a constante elástica da mola. A frequência natural do sistema não amortecido é dada pela Eq. (2)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2)$$

e o coeficiente de amortecimento por unidade de massa γ é definido conforme a Eq. (3):

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad (3)$$

Substituindo as Eqs. (2) e (3) em (1) temos a equação diferencial do sistema massa-mola amortecido, dado na Eq. (4).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4)$$

O Movimento Harmônico Forçado (MHF) ocorre quando uma força periódica externa atua sobre o sistema, no formato geral dado por $F_{ext} = F_0 \cos \omega_1 t$, onde F_0 é a intensidade máxima da força e ω_1 a frequência angular da vibração. Sob a ação dessa força externa, a equação diferencial do sistema passa a ser dada pela Eq. (5).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos \omega_1 t}{m} \quad (5)$$

A solução analítica da equação diferencial (5), no regime permanente, é dada pela Eq. (6)

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \left\{ \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\gamma\omega_1)^2} \cos \omega_1 t + \frac{\gamma\omega_1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\gamma\omega_1)^2} \sin \omega_1 t \right\}, \quad (6)$$

onde $x(t)$ é o deslocamento da massa em função do tempo. Na Eq. (6) pode-se verificar claramente o fenômeno da ressonância (máximo de $x(t)$), quando a amplitude externa e a amplitude natural do sistema atingem valores semelhantes, $\omega_0 \sim \omega_1$ (Young et al., 2015).

Para a implementação prática da força externa, a massa é conectada à mola e esta recebe uma excitação periódica por um motor com eixo excêntrico. A frequência de excitação é medida pelo sensor FC-33, enquanto o deslocamento da massa é registrado pelo HC-SR04. Os dados foram coletados via Arduino IDE, com amostragem a cada 1 segundo, permitindo analisar a amplitude em função da frequência e identificar a ressonância, ponto em que a frequência externa coincide com a natural do sistema, gerando a máxima oscilação. O kit permite que o aluno varie a frequência da força aplicada e observe diretamente o pico de amplitude, enquanto a análise teórica prevê a frequência onde esse fenômeno ocorre. O texto completo do kit, as filmagens e a planilha de análise de dados podem ser consultadas no link: [Estudo da ressonância em um sistema massa-mola amortecido com uso de Arduino](#).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

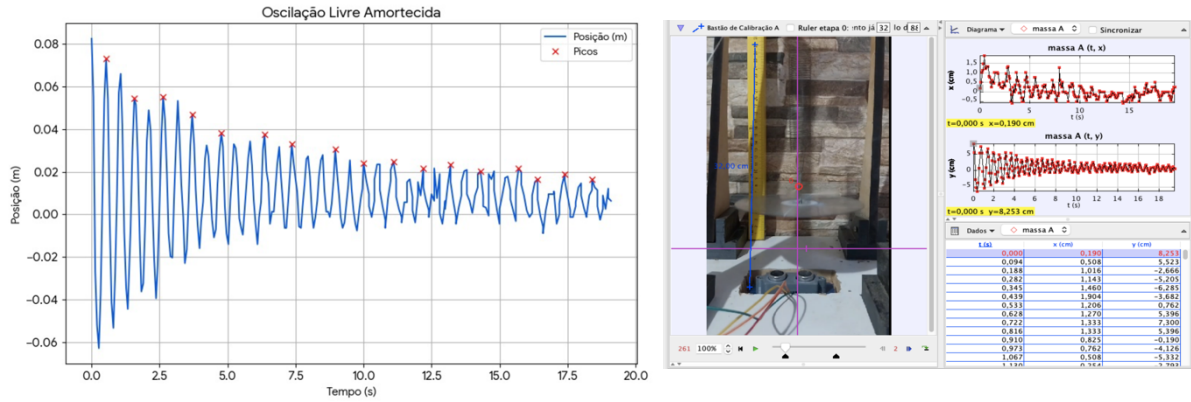
Foi realizada a construção do kit experimental com uma mola e uma massa, cujos parâmetros físicos são:

$$\text{massa: } m = (21,2 \pm 0,5) \text{ gramas e } k = (3,03 \pm 0,33) \text{ newtons/metro.} \quad (7)$$

O passo inicial da análise do movimento foi a gravação da filmagem do sistema massa-mola sem força externa e posterior análise do vídeo no programa Tracker, para a obtenção do coeficiente de amortecimento. Na figura 1 mostra-se o gráfico representando a posição da massa em função do tempo para o sistema massa-mola com amortecimento. Observa-se a diminuição gradual da amplitude das oscilações, característica do regime subamortecido, indicando a dissipação de energia ao longo do tempo devido à força de amortecimento. A constante de amortecimento b foi determinada a partir da análise do movimento amortecido livre do sistema massa-mola, sem força externa. Conforme o modelo teórico,

a amplitude decai exponencialmente ao longo do tempo, descrita pela função $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$, onde γ é o coeficiente de amortecimento por unidade de massa (Tipler; Mosca, 2016).

FIGURA 1. Esquerda: gráfico do movimento harmônico amortecido obtido através do Excel. Direita: trecho do vídeo de oscilação e análise do mesmo via programa Tracker.



Fonte: Elaborado pelo Autor

Para análise linear, aplicou-se o logaritmo natural às amplitudes máximas, obtendo uma relação linear conforme a Eq. (8).

$$\ln A(t) = \ln A_0 - \gamma t. \quad (8)$$

Em seguida foram identificados os picos máximos de oscilação nos dados experimentais de posição em função do tempo. Esses picos foram utilizados para construir um gráfico de $\ln A$ versus t , permitindo a aplicação de uma regressão linear. A inclinação da reta obtida corresponde ao valor de $-\gamma$, o que possibilitou a determinação direta do coeficiente de amortecimento. Por fim, com a massa do sistema m previamente conhecida, foi possível calcular a constante de amortecimento b utilizando a relação teórica, Eq. (3).

A propagação de erros foi feita com base nos princípios clássicos descritos por Vuolo (1996), utilizando a fórmula geral de propagação de incertezas. Parâmetros como massa e distância foram medidos diretamente, enquanto o coeficiente de amortecimento (γ) foi obtido por regressão linear. A incerteza de γ corresponde ao erro padrão da inclinação, calculado com a função *scipy.stats.linregress*, da biblioteca *scipy* (Scipy, 2025).

Com a incerteza de γ , a incerteza do coeficiente b , σ_b , foi calculada pela Eq (9):

$$\sigma_b = \sqrt{(2\gamma \cdot \sigma_m)^2 + (2m \cdot \sigma_\gamma)^2} \quad (9)$$

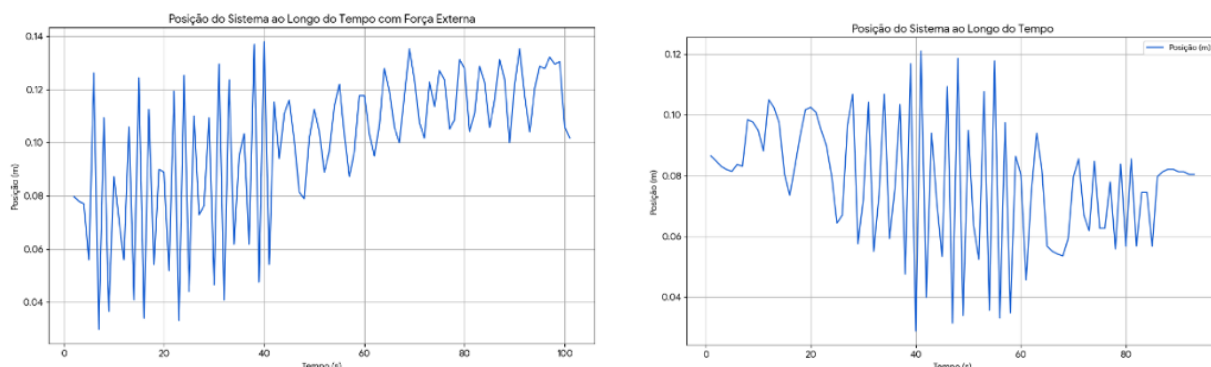
A incerteza da frequência natural (σ_{ω_0}), da constante elástica (σ_k), da frequência (σ_f) e da força externa máxima (σ_{F_0}) foram determinadas com base na Eq (10) (Vuolo, 1996). Vale destacar que, para o cálculo da incerteza da frequência, foi considerada uma incerteza no tempo de 0,001s, associada à resolução da função *millis()* do Arduino (Arduino, 2024), que possui precisão de 1 ms.

$$\sigma_{f(x,y,z)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \sigma_z\right)^2} \quad (10)$$

Na segunda etapa, analisou-se o Movimento Harmônico Forçado com foco na ressonância. Um motor DC acoplado a um sistema massa-mola aplicou uma força periódica, variando-se a rotação (rpm). Para cada rpm, mediu-se a amplitude da oscilação, e os valores foram convertidos para Hz, permitindo a construção da curva de ressonância. Observou-se que acima de 200 rpm surgiram instabilidades mecânicas, como o desvio lateral da mola e o tensionamento excessivo da corda. Por isso, limitou-se a frequência ao intervalo de 0 a 120 rpm, garantindo maior segurança e estabilidade. A frequência de ressonância foi estimada experimentalmente e comparada com o valor teórico obtido a partir da massa, constante elástica e amortecimento. Apesar da tendência esperada ter sido observada, instabilidades

mecânicas e deslocamentos comprometeram a precisão da comparação. Recomenda-se aprimorar o acoplamento, a fixação e a suspensão do sistema para maior confiabilidade. A Figura 2 apresenta dois gráficos: o primeiro com a resposta do sistema da rotação máxima para a mínima e o segundo no sentido inverso.

FIGURA 2. Gráfico do movimento harmônico amortecido com força externa obtido através do Excel, com posições obtidas via sensor HC-SR04. O significado dos dois gráficos está descrito no texto.



Fonte: Elaborado pelo Autor

A frequência de ressonância do sistema foi determinada teoricamente, a partir dos parâmetros do sistema e da Eq. (2). A frequência da força externa (ω_1), na região de ressonância, foi obtida experimentalmente através do gráfico da Figura 2, à direita, para os máximos de oscilação. O valor obtido foi convertido de rad/s para Hz. Experimentalmente, ela foi identificada na curva de ressonância, como a frequência correspondente à maior amplitude de oscilação, cerca de 1,83 Hz. Com base nas Eqs. e nos dados ajustados da Figura 2, a Tabela 1 apresenta os valores calculados.

TABELA 1: Parâmetros do sistema massa-mola, incluindo valores teóricos, experimentais e suas respectivas incertezas.

Massa (m)	$(21,2 \pm 0,5) \text{ g}$
Constante da Mola (k)	$(3,0 \pm 0,3) \text{ N/m}$
Constante de Amortecimento (b)	$(0,0037 \pm 0,0003) \text{ Ns/m}$
Coeficiente de Amortecimento (γ)	$(0,087 \pm 0,008) \text{ 1/s}$
Frequência Natural (ω_0)	$(12,0 \pm 0,7) \text{ rad/s}$
Frequência de Ressonância Teórica	$(1,91 \pm 0,11) \text{ Hz}$
Frequência de Ressonância Experimental	$(1,8 \pm 0,3) \text{ Hz}$
Amplitude da Força Externa (F_0)	$(0,034 \pm 0,012) \text{ N}$
RPM Máximo do Motor	$(120 \pm 18) \text{ rpm}$
Sensor HC-SR04	$(x \pm 0,3) \text{ cm}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

CONCLUSÕES

Este projeto visa a elaboração de um kit experimental de baixo custo, baseado em Arduino, para auxiliar no ensino de Física e permitir a observação e a análise quantitativa da ressonância em um sistema massa-mola. A construção do aparato foi concluída, e os resultados demonstraram que a

ferramenta é capaz de permitir a observação do fenômeno de ressonância e do movimento harmônico amortecido. Vídeos do comportamento do sistema oscilante podem ser vistos no link publicado na seção de materiais e métodos. A análise quantitativa do sistema, um dos objetivos centrais, resultou na obtenção de uma frequência de ressonância experimental de aproximadamente 1,83 Hz, que se alinha com o valor teórico de 1,91 Hz, valores distantes de $Z = 0,22$ desvios-padrões. Esse resultado indica que o kit pode ser utilizado para tornar os conceitos teóricos mais concretos. No entanto, a precisão das medições foi afetada por instabilidades mecânicas, como o desvio lateral da mola e o tensionamento da corda, o que dificultou uma visualização mais completa da fuga da ressonância para frequências mais altas. Em suma, o projeto alcançou o objetivo de projetar e construir um kit que promove a aprendizagem ativa, permitindo a observação do fenômeno da ressonância. No entanto, a plena avaliação quantitativa do kit, confrontando a hipótese de ser um método acurado e eficiente, fica limitada pela necessidade de aprimoramentos na estabilidade mecânica do aparato, conforme sugerido nos resultados obtidos.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

K. S. Braga foi responsável pelo desenvolvimento da metodologia, pela construção do aparato experimental, pela condução do experimento e análise dos dados. C. A. da Rocha participou da concepção do experimento, da elaboração da introdução teórica e da revisão do texto. Ambos os autores contribuíram para a redação do artigo e aprovaram a versão final submetida.

AGRADECIMENTOS

K. S. Braga agradece ao CNPq pelo apoio financeiro. C. A. da Rocha agradece ao Arthur M. S. Melo pelas primeiras versões do sistema e pelas intermináveis discussões sobre a programação no Arduino.

REFERÊNCIAS

- ARDUINO. **millis()** - **Arduino Reference**. 2024. Disponível em: <https://www.arduino.cc/reference/en/language/functions/time/millis/>. Acesso em: 28 jul. 2025.
- BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. Metodologias ativas de aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica. *Boletim Técnico do Senac*. Rio de Janeiro, v. 39, n. 2, p. 48-67. Disponível em: <https://doi.org/10.26849/bts.v39i2.349>
- BENDER, W. N. **Projetos para sala de aula: aprendizagem baseada em projetos**. Porto Alegre: Penso, 2014.
- PEREIRA, F. M.; LIMA, L. P. Ensino de ressonância utilizando Arduino: uma proposta experimental para o ensino médio. *Revista Brasileira de Física Técnica e Aplicada*, v. 10, n. 1, p. 57–65, 2021.
- SCIPY. **scipy.stats.linregress** — **SciPy v1.11.1 Manual**. 2025. Disponível em: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.linregress.html>. Acesso em: 28 jul. 2025.
- SILVA, M. J.; RIBEIRO, E. C. Uso do Arduino na investigação da ressonância mecânica: proposta de experimento didático. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 36, n. 2, p. 616–641, 2019.
- TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- VUOLO, José Henrique. **Fundamentos da teoria de erros**. Editora Blucher, 1996.
- H. D. YOUNG et al. **Física II: Termodinâmica e Ondas**. 14. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, v. II, 2015.