

16º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2025

SISTEMAS DE LIÉNARD COM CICLOS LIMITES ARBITRÁRIOS

GUSTAVO MORATO DE MARCHI SOARES¹, FABRICIO FERNANDO ALVES², DIEGO NUNES DA SILVA³

¹Graduando em Engenharia Elétrica, Bolsista PIBIFSP, IFSP-PEP, gustavo.morato@aluno.ifsp.edu.br.

²Doutor em Matemática; IFSP-PEP; Presidente Epitácio; SP; fabricio.alves@ifsp.edu.br.

³Doutor em Engenharia Elétrica; IFSP-PEP; Presidente Epitácio; SP; diego.nunes@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.02.04-3 Equações Diferenciais Ordinárias.

RESUMO: O número máximo de ciclos limites de um sistema dinâmico polinomial de grau n é um problema ainda não resolvido, proposto por David Hilbert em 1900. Nesse sentido, esse trabalho aborda os sistemas de Liénard, cujo número máximo de ciclo limites é conhecido para alguns casos. Com isso, monta-se um algoritmo capaz de construir sistemas de Liénard com m ciclos limites desejados, permitindo a confecção de exemplos para o estudo de ciclos limites. O algoritmo foi implementado e disponibilizado em *Python*, e validado por meio de um exemplo.

PALAVRAS-CHAVE: sistemas dinâmicos; sistemas não lineares; órbitas periódicas; método de Melnikov; 16º problema de Hilbert.

LIÉNARD SYSTEMS WITH ARBITRARY LIMIT CYCLES

ABSTRACT: The maximum number of limit cycles of a polynomial dynamical system of degree n is an unsolved problem, proposed by David Hilbert in 1900. In this sense, this work addresses Liénard systems, whose maximum number of limit cycles is known for some cases. Thus, an algorithm is developed capable of constructing Liénard systems with desired m limit cycles, allowing the construction of examples for the study of limit cycles. The algorithm was implemented and made available in *Python*, and validated through an example.

KEYWORDS: dynamical systems; nonlinear systems; periodic orbits; Melnikov's method; 16º Hilbert's problem.

INTRODUÇÃO

Conforme Cardin (2008), a segunda parte do 16º Problema de Hilbert pergunta sobre o número máximo de ciclos limites de um sistema polinomial de grau n da forma (1),

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^n b_{ij}x^i y^j, \quad (1)$$

e se trata de um problema ainda aberto e relevante (GAIKO, 2008; LI, 2003; BUZZI; NOVAES, 2024; LYNCH, 2018). Visto isso, esse trabalho aborda os principais resultados quanto ao número máximo de ciclos limites de uma classe particular de sistemas, as equações de Liénard. Além disso, é proposto um algoritmo implementado em *Python* para gerar um sistema polinomial dado um conjunto de ciclos limites desejados.

MATERIAIS E MÉTODOS

Seja $X : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, um campo vetorial de classe C^1 definido no aberto $\mathcal{U}$. X é associado ao sistema $\frac{dx}{dt} = X(x)$ e vice-versa. Chamam-se trajetórias de X as aplicações diferenciais $\varphi : I \rightarrow \mathcal{U}$ tais que $\frac{d\varphi}{dt} = X(\varphi(t))$ para todo $t \in I$, sendo I um intervalo da reta real (CARDIN, 2008). Com isso, são apresentadas as definições de órbita, órbita periódica e ciclo limite.

Definição 1. O conjunto $\mathcal{O}(p) = \{\varphi(t, p) : t \in I_p\}$, ou seja, a imagem da trajetória de X pelo ponto p , denomina-se órbita de X pelo ponto p .

Note que $q \in \mathcal{O}_p \Leftrightarrow \mathcal{O}_q = \mathcal{O}_p$. Afinal, se $q \in \mathcal{O}_p$, $q = \varphi(t_1, p)$ e $\varphi(t, q) = \varphi(t+t_1, p)$ e $I_p - t_1 = I_q$. Ou seja, duas órbitas de X coincidem ou são disjuntas (SOTOMAYOR, 2012). Isto é, $\mathcal{U}$ fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser

- (a) imagem biunívoca de um intervalo de $\mathbb{R}$;
- (b) um ponto;
- (c) difeomorfa a um círculo.

No caso (b) $p = \gamma_p$; a órbita chama-se ponto singular; no caso (c) a órbita chama-se periódica.

Definição 2. Um ciclo limite do campo X é uma órbita periódica isolada de X . Especificamente, uma órbita periódica γ de X é um ciclo limite de X se existir um aberto $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\gamma \subseteq \mathcal{U}_0$ e $\mathcal{O}(z)$ não é uma órbita periódica para nenhum $z \in \mathcal{U}_0$.

Nesse texto é tratado de uma classe específica de sistemas dinâmicos descritos por (2).

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad (2)$$

onde $F(x)$ e $g(x)$ são funções reais. (2) é chamado de sistema de Liénard. De acordo com Perko (2013), Liénard demonstrou que caso $F(x)$ e $g(x)$ sejam ímpares, de classe C^1 , onde $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$, $F(x)$ tem um único zero positivo em $x = a$ e é monótona crescente para infinito para $x \geq a$, implica que (2) tem somente um ciclo limite.

Ainda, conforme Perko (2013), Zhang Zhifen obteve resultados sobre a localização e a estabilidade deste ciclo limite. Posteriormente Zhang determinou condições para que o sistema (2) tenha ao máximo dois ciclos limites.

Quanto mais condições são impostas sobre F e g , mais fortes os resultados obtidos. Por exemplo, Lins, de Melo e Pugh demonstraram que caso $g(x) = x$ e $F(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, onde $a_1a_3 < 0$, (2) terá apenas um ciclo limite, estável se $a_1 < 0$ e instável se $a_1 > 0$ (PERKO, 2013).

Dessa forma, é apresentado o Teorema 1, utilizado para confecção do algoritmo proposto.

Teorema 1. (PERKO, 2013) Para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema (2) com

$$g(x) = x \quad e \quad F(x) = \varepsilon(a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2m+1}x^{2m+1}) \quad (3)$$

tem no máximo m ciclos limites e, além disso, para $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, este sistema tem exatamente m ciclos limites nos quais são assintóticos aos círculos de raios r_j , para $j = 1, 2, \dots, m$, centrados na origem, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se, e somente se, a equação de grau m

$$\frac{a_1}{2} + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{5a_5}{16}\rho^2 + \frac{35a_7}{128}\rho^3 + \cdots + \binom{2m+2}{m+1} \frac{a_{2m+1}}{2^{2m+2}}\rho^m = 0 \quad (4)$$

tem m raízes positivas $\rho = r_j^2$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Sua demonstração utiliza o método de Melnikov; portanto, é comentado brevemente sobre o mesmo. O método de Melnikov considera uma equação do tipo:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon, \mu) \quad (5)$$

onde f e g são analíticas em $\mathbb{R}^2$, $\varepsilon \ll 1$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, tal que o sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) possui uma família uniparamétrica de órbitas periódicas $\Gamma_\alpha : \gamma_\alpha(t)$, $\alpha \in (0, \infty)$ e período T_α .

Definição 3. A função de Melnikov para o sistema (4) ao longo do ciclo $\Gamma_\alpha : \gamma_\alpha(t)$ de período T_α do sistema não perturbado é dada por

$$M(\alpha, \mu) = \int_0^{T_\alpha} e^{-\int_0^t \nabla \cdot f(\gamma_\alpha(s)) ds} f \wedge g(\gamma_\alpha(t), 0, \mu) dt \quad (6)$$

onde o produto exterior de dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^2$ é definido como $f \wedge g = x_1y_2 - y_1x_2$.

Assumindo a existência de órbitas periódicas para o sistema não perturbado, Blows e Perko (1994) provaram os teoremas abaixo.

Teorema 2. Se existem $\alpha_0 \in I$ e $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$M(\alpha_0, \mu_0) = 0 \quad e \quad M'_\alpha(\alpha_0, \mu_0) \neq 0, \quad (7)$$

então, para todo ε suficientemente pequeno e não nulo, o sistema (5) possui um ciclo limite hiperbólico único em uma vizinhança $\mathcal{O}(\varepsilon)$ de Γ_{α_0} . Além disso, se $M(\alpha_0, \mu_0) \neq 0$, então, para todo $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, o sistema (5) não possui ciclo limite em uma vizinhança $\mathcal{O}(\varepsilon)$ de Γ_{α_0} .

Teorema 3. Se a equação $M(\alpha, \mu_0) = 0$ tem k soluções $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in I$ com $M'_\alpha(\alpha_j, \mu_0) \neq 0$, $j = 0, \dots, k$ então, para todo $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, existem exatamente k famílias uniparamétricas de ciclos limites hiperbólicos do sistema (5) que bifurcam das órbitas periódicas $\Gamma_{\alpha_0}, \dots, \Gamma_{\alpha_{k-1}}$ e cujos pontos correspondentes na seção de Poincaré são normais. Se $M(\alpha, \mu_0)$ não possui raízes para $\varepsilon = 1$, então não existem famílias uniparamétricas de ciclos limites que bifurquem de α para $\varepsilon \neq 0$.

Teorema 4. Sob as mesmas hipóteses dos teoremas anteriores, se existem $\alpha_0 \in I$ e $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$M(\alpha_0, \mu_0) = M_\alpha(\alpha_0, \mu_0) = \cdots = M_\alpha^{(m-1)}(\alpha_0, \mu_0) = 0, \quad (8)$$

$$M_\alpha^{(m)}(\alpha_0, \mu_0) \neq 0 \quad e \quad M_{\mu_j}(\alpha_0, \mu_0) \neq 0 \quad (9)$$

para algum $j = 1, \dots, n$, então, para todo ε suficientemente pequeno e não nulo, existe uma função analítica $\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$, tal que, para $\mu = \mu(\varepsilon)$ o sistema (5) possui um ciclo limite único de multiplicidade m em uma vizinhança $\mathcal{O}(\varepsilon)$ do ciclo Γ_{α_0} .

Demonstração (para o Teorema 1). Para o sistema (2), tem-se uma bifurcação da forma $f(y, -x)$ (veja Sanjuán (1998)); logo, $\nabla \cdot f(x) = 0$, assim a função de Melnikov é

$$M(\alpha, \mu) = \int_0^{T_\alpha} f \wedge g(\gamma_\alpha(t), 0, \mu) dt. \quad (10)$$

O sistema não perturbado possui uma família uniparamétrica de órbitas periódicas $\Gamma_\alpha : \gamma_\alpha(t) = (\alpha \cdot \cos(t), \alpha \cdot \sin(t))$, $\alpha \in (0, \infty)$, e $T_\alpha = 2\pi$ para todo α . Considerando (3) tem-se que $\mu = (a_1, \dots, a_{2m+1})$ e portanto a função de Melnikov fica

$$M(\alpha, \mu) = - \int_0^{2\pi} \{a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \dots + a_{2m+1} x^{2m+1}(t)\} x(t) dt. \quad (11)$$

Substituindo $x(t)$ da órbita periódica $\gamma_\alpha(t)$ obtém-se

$$M(\alpha, \mu) = - \int_0^{2\pi} \{a_1 \alpha^2 \cos^2(t) + a_2 \alpha^3 \cos^3(t) + \dots + a_{2m+1} \alpha^{2m+1} \cos^{2m+1}(t)\} dt. \quad (12)$$

Todos os termos ímpares resultam em zero na integração, enquanto os termos pares geram

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m+1}(t) dt = \binom{2m+2}{m+1} \frac{a_{2m+1}}{2^{2m+1}} \pi, \quad (13)$$

dessa forma, a expressão (12) se simplifica para

$$M(\alpha, \mu) = -2\pi\alpha^2 \left\{ \frac{a_1}{2} + \frac{3a_3}{8}\alpha^2 + \dots + \binom{2m+2}{m+1} \frac{a_{2m+1}}{2^{2m+1}} \alpha^{2m} \right\}. \quad (14)$$

Assim, com base na função de Melnikov (14) obtida, juntamente com os Teoremas 2, 3 e 4, chega-se a afirmação do Teorema 1, onde $\alpha = r_j$. (Para mais detalhes, veja Sanjuán (1998)). $\square$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através do Teorema 1 é possível construir sistemas polinomiais com a quantidade de ciclos limites que desejar. Dado um número m de ciclos limites desejados, com raios $r_1, r_2, \dots, r_j$, tem-se pelo Teorema 1, que existe um sistema

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon(a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2m+1} x^{2m+1}), \quad \frac{dy}{dt} = -x \quad (15)$$

com m ciclos limites assintóticos aos círculos de raios r_j , onde os coeficientes $a_1, a_3, \dots, a_{2m+1}$ são determinados pela equação

$$\frac{a_1}{2} + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{5a_5}{16}\rho^2 + \frac{35a_7}{128}\rho^3 + \dots + \binom{2m+2}{m+1} \frac{a_{2m+1}}{2^{2m+2}} \rho^m = \prod_{j=1}^m (\rho - r_j^2). \quad (16)$$

Dessa forma, é montado o Algoritmo 1 para construção de um sistema de Liénard com m ciclos

limites.

Algoritmo 1 Pseudocódigo para gerar um sistema com m ciclos limites.

- 1: **Início**
 - 2: Leia m
 - 3: Leia $r_1, r_2, \dots, r_m$
 - 4: $\text{polinomio_raio} \leftarrow (\rho - r_1^2) \cdot (\rho - r_2^2) \cdot \dots \cdot (\rho - r_j^2)$
 - 5: $\text{polinomio_teorema} \leftarrow \frac{a_1}{2} + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{5a_5}{16}\rho^2 + \dots + \binom{2m+2}{m+1} \frac{a_{2m+1}}{2^{2m+2}}\rho^m$
 - 6: Resolva simbolicamente $\text{polinomio_raio} - \text{polinomio_teorema} = 0$ para $a_1, a_3, \dots, a_{2m+1}$
 - 7: Mostrar $a_1, a_3, \dots, a_{2m+1}$
 - 8: Mostrar $\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon(a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{2m+1}x^{2m+1}), \quad \frac{dy}{dt} = -x$
 - 9: **Fim**
-

O Algoritmo 1 foi implementado, utilizando o SymPy para resolver simbolicamente a expressão (16) e está disponível no *Github aqui* (SOARES, 2025).

Exemplo 1. Para construir um sistema de Liénard com dois ciclos limites com raios 1,5 e 3,4 basta resolver a equação

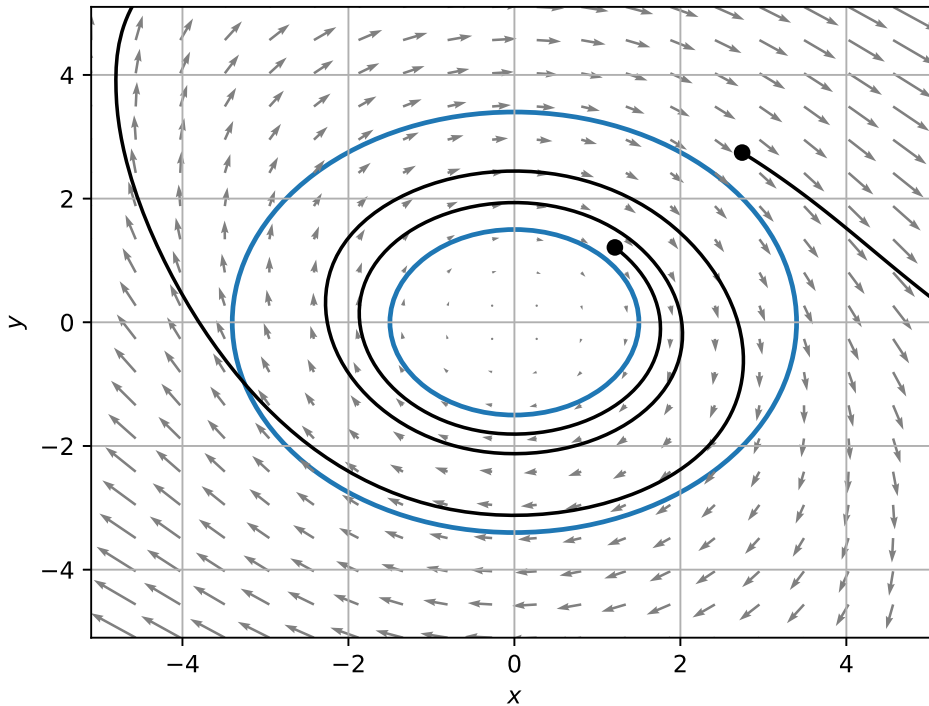
$$\frac{a_1}{2} + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{5a_5}{16}\rho^2 = (\rho - 1,5^2) \cdot (\rho - 3,4^2). \quad (17)$$

De acordo com o algoritmo implementado, obtém-se os valores $a_1 = 52,02$, $a_3 = -36,826667$ e $a_5 = 3,2$, de jeito que, o sistema

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon(52,02 \cdot x - 36,826667 \cdot x^3 + 3,2x^5), \quad \frac{dy}{dt} = -x \quad (18)$$

tem os dois ciclos limites desejados como mostra a Figura 1.

Figura 1: Retrato de fase de (18), com $\varepsilon = 0,001$.



Fonte: Elaborado pelos autores (2025).

CONCLUSÕES

Através do entendimento sobre ciclos limites nos sistemas de Liénard, em especial, do Teorema 1, foi possível montar um algoritmo capaz de construir um sistema dinâmico de Liénard com um número de ciclos limites que o usuário informar. O algoritmo proposto foi implementado em *Python* e disponibilizado pelo Github para acesso livre, de modo a ser utilizado para criação de exemplos para sistemas com uma quantidade desejada de ciclos limites.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

AGRADECIMENTOS

Esse projeto é financiado com uma bolsa de iniciação científica pelo IFSP-PEP e o PACTec, que viabilizou este trabalho.

REFERÊNCIAS

- BLOWS, T. R.; PERKO, L. M. Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems. **SIAM Review**, v. 36, 1994. ISSN 00361445.
- BUZZI, C. A.; NOVAES, D. D. A note on a recent attempt to solve the second part of hilbert's 16th problem. **arXiv preprint arXiv:2411.09594**, 2024. Acessado em 15 de agosto de 2025.
- CARDIN, P. T. **Ciclos limites e a equação de van der Pol**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2008.
- GAIKO, V. A. Limit cycles of quadratic systems. **Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications**, v. 69, 2008. ISSN 0362546X.
- LI, J. Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. **International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering**, v. 13, 2003. ISSN 02181274.
- LYNCH, S. **Dynamical Systems with Applications using Python**. Springer International Publishing, 2018. ISBN 9783319781457. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-78145-7>>.
- PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. New York, NY: Springer New York, 2013. ISBN 978-1-4613-0003-8.
- SANJUÁN, M. A. Liénard systems, limit cycles, and melnikov theory. **Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics**, v. 57, 1998. ISSN 1063651X.
- SOARES, G. M. M. **SISTEMAS DE LIÉNARD COM CICLOS LIMITES ARBITRÁRIOS**. Presidente Epitácio, São Paulo: GitHub, 2025. <<https://github.com/MoratoZ/SISTEMAS-DE-LIENARD-COM-CICLOS-LIMITES-ARBITRARIOS>>. Acessado em 15 de agosto de 2025.
- SOTOMAYOR, J. **Equações Diferenciais Ordinárias - Textos universitários do IME-USP**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012. ISBN 9788578611187.