

16º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2025

IDENTIFICAÇÃO DE QUÁDRICAS VIA DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

VICTOR AZEVEDO¹, MÁIRA PERES ALVES SANTIM²

¹ Discente no curso Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de São Paulo (IFSP), campus Birigui.

² Mestre na Área de Automação, em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp). Atualmente é professora do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), campus Birigui.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.01.06-3 Geometria Algébrica.

RESUMO: O projeto apresentado neste artigo faz parte de um trabalho de iniciação científica, no qual foi realizado um estudo sistemático sobre Álgebra Linear e a aplicação do Teorema Espectral na identificação de quádricas. A análise parte da observação de que toda forma quadrática pode ser representada por uma matriz simétrica real, cuja diagonalização permite reescrevê-la em sua forma canônica. Neste trabalho é mostrado em um exemplo como o processo de diagonalização, fundamentado no Teorema Espectral, possibilita a classificação de superfícies quádricas no $\mathbb{R}^3$. Esse processo transforma a equação geral de uma quádrica em uma expressão mais simples, facilitando sua interpretação geométrica e permitindo classificá-la em um elipsoide. O processo se estende para a classificação de elipses, hipérboles, parábolas, cones e outras superfícies quádricas relacionadas.

PALAVRAS-CHAVE: álgebra linear; diagonalização de matrizes; teorema espectral.

IDENTIFICATION OF QUADRICS THROUGH MATRIX DIAGONALIZATION

ABSTRACT: The project presented in this article is part of an undergraduate research initiative, in which a systematic study of Linear Algebra was conducted, focusing on the application of the Spectral Theorem to the identification of quadric surfaces. The analysis is based on the observation that every quadratic form can be represented by a real symmetric matrix, whose diagonalization allows it to be rewritten in its canonical form. This work demonstrates how the diagonalization process, grounded in the Spectral Theorem, enables the classification of quadric surfaces in $\mathbb{R}^3$. This process transforms the general equation of a quadric into a simpler expression, facilitating its geometric interpretation and allowing it to be classified, for example, as an ellipsoid. The process extends to hyperboloids, paraboloids, cones, and other related quadric surfaces.

KEYWORDS: linear algebra; matrix diagonalization; spectral theorem.

INTRODUÇÃO

As superfícies quádricas estão relacionadas às seções cônicas, sendo formadas quando essas curvas se movimentam no espaço. No século IV a.C., Menecmo descobriu a parábola e a hipérbole, e posteriormente a elipse, contribuindo para a solução de problemas como a duplicação do cubo. Euclides estabeleceu bases importantes para o estudo das cônicas, depois aprofundadas por Apolônio e Pappus de Alexandria. No século XVII, Pierre de Fermat e René Descartes sistematizaram a aplicação da álgebra à geometria, promovendo o avanço da Matemática Moderna. Este trabalho busca apresentar uma ferramenta para o estudo da Geometria Analítica, utilizando conceitos de Álgebra Linear e a diagonalização de matrizes simétricas, fundamentada no Teorema Espectral, para a identificação e classificação de quádricas.

MATERIAIS E MÉTODOS

O estudo apresentado foi desenvolvido no Trabalho de Iniciação Científica do autor, abordando a aplicação do Teorema Espectral e a diagonalização de matrizes simétricas na identificação e classificação de superfícies quádricas, bem como suas aplicações em Geometria Analítica. O trabalho baseou-se em um estudo sistemático de Álgebra Linear e Geometria Analítica, iniciando pelos conceitos fundamentais de matrizes e diagonalização, avançando para a aplicação do Teorema Espectral em matrizes simétricas e aprofundando-se na análise e classificação das quádricas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Segundo GAMA (2015) superfícies quádricas ocupam um papel de destaque na Geometria Analítica por assumirem diversas formas no espaço tridimensional, e o estudo dessas superfícies permite compreender como variações nos coeficientes de sua equação geral influenciam sua configuração geométrica, fato que motiva a seguinte definição:

Definição 1. Chamamos de superfícies quádricas o conjunto de pontos $P = (x, y, z)$ cujas coordenadas satisfazem uma equação quadrática da forma:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, sendo não nulo pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e, f . Essa equação representa uma superfície no espaço tridimensional, e sua forma geométrica depende dos valores dos coeficientes.

As superfícies quádricas, quando cortadas por planos coordenados ou paralelos a eles, produzem curvas chamadas de cônicas. A interseção com um plano é chamada de traço da superfície no plano. A equação geral pode representar diferentes tipos de superfícies, dependendo dos coeficientes envolvidos. As soluções dessa equação são, por definição, uma **quádrica**, podendo ser:

- **Não degenerada:** cilindro quádruplo, elipsoide, hiperboloide, paraboloides ou cone.
- **Degenerada:** uma reta, um par de retas paralelas, duas retas concorrentes, um ponto ou conjunto vazio.

Assim, para identificar o lugar geométrico associado a uma equação do segundo grau em três variáveis — especialmente para reconhecer uma quádrica — é necessário reduzir a equação dada a uma forma mais simples. De acordo com OYAFUÇO (2015) este processo é feito escolhendo uma base ortonormal conveniente de $\mathbb{R}^3$, de modo que, no novo sistema de coordenadas, a equação resultante seja facilmente reconhecível.

Essa simplificação é possível graças à diagonalização da matriz associada à parte quadrática da equação. Para justificar tal procedimento, recorreremos aos teoremas apresentados por HYGINO (2012) que garantem a existência de tal base e a viabilidade da transformação que leva a uma forma diagonal — condição essencial para a classificação das quádricas.

Teorema 1. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ admite uma base β em relação à qual a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ — isto é, a matriz de T com respeito à base β tanto no domínio quanto no contradomínio — é diagonal se, e somente se, essa base β for formada por autovetores de T .

Assim, definimos $A = [T]_{\alpha}^{\alpha}$, com α sendo a base canônica, uma matriz quadrada de ordem n definida pelo operador T , e $D = [T]_{\beta}^{\beta}$, com β sendo a base formada pelos autovetores de A .

Teorema 2. Uma matriz A de ordem n é diagonalizável se, e somente se, existe uma matriz P invertível de ordem n tal que

$$D = P^{-1}AP$$

é uma matriz diagonal.

No Teorema 2, a matriz P é a matriz de mudança de base, chamada também de matriz que diagonaliza A . Ela pode ser representada pelos autovetores linearmente independentes da matriz A . A diagonalização de matrizes simétricas é também chamada de **diagonalização ortogonal**, pois a matriz P que diagonaliza uma matriz A , simétrica, é uma matriz ortogonal, ou seja,

$$P^t = P^{-1}.$$

Isso significa que os vetores que representam as linhas e as colunas de P são **ortonormais**.

A explicação para tal afirmação é dada por um dos principais teoremas da Álgebra Linear: o Teorema Espectral, apresentado por HEFEZ (2012).

Teorema Espectral. Se A é uma matriz simétrica de ordem n , então existe uma matriz ortogonal P de ordem n , tal que $P^{-1}AP = P^tAP$ é diagonal.

Em outras palavras, o que o Teorema Espectral afirma, é que toda matriz simétrica é diagonalizável e, além disso, existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A tal que as colunas da matriz ortogonal P é formada por esses autovetores.

A definição a seguir apresentada por GAMA (2015) nos garante a representação matricial de uma forma quadrática a partir de coordenadas na sua base canônica. Essa informação é necessária para a aplicação do Teorema Espectral na identificação das superfícies quádricas.

Definição 2. Uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ pode ser representada por uma matriz. Seja $X = (x, y, z)$ com coordenadas na base canônica ω , então:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

A matriz associada à forma quadrática Q é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

onde: a_{11}, a_{22}, a_{33} são os coeficientes dos termos quadrados; $a_{12} + a_{21}, a_{13} + a_{31}, a_{23} + a_{32}$ são os coeficientes dos termos cruzados xy, xz, yz , respectivamente.

Para simplificar, costuma-se usar matrizes simétricas ($A = A^t$), onde $a_{ij} = a_{ji}$. A forma quadrática é então expressa por:

$$Q(X) = X^tAX.$$

Como A é simétrica, ela admite uma diagonalização ortogonal: existe uma matriz ortogonal P tal que

$$A = PDP^t,$$

onde D é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de A . Substituindo essa expressão em $Q(X)$, temos:

$$Q(X) = X^tPDP^tX.$$

Se definirmos $X' = P^t X$, ou seja, mudarmos para um novo sistema de coordenadas ortonormal, então:

$$Q(X) = (X')^t D X',$$

o que elimina os termos cruzados e simplifica a equação.

A partir da forma quadrática associada à equação geral de uma quádrlica, e com base no Teorema Espectral, é possível identificar a superfície por meio da diagonalização da matriz simétrica envolvida. A seguir, analisamos dois casos distintos, conforme a presença ou ausência de termos cruzados na equação.

Caso 1: Quando os coeficientes $d = e = f = 0$, ou seja, nenhum dos termos cruzados existe. Neste caso, basta usar o processo de completar quadrados, que é equivalente a escolher um sistema de coordenadas dado pela translação do sistema original. Em situações assim, a quádrlica em questão está alinhada aos eixos coordenados, seja com centro ou vértice na origem ou quando há uma translação dos eixos coordenados.

Exemplo 1. Verificaremos o tipo de quádrlica representada pela equação

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 16y + 13 = 0.$$

Completando o quadrado temos

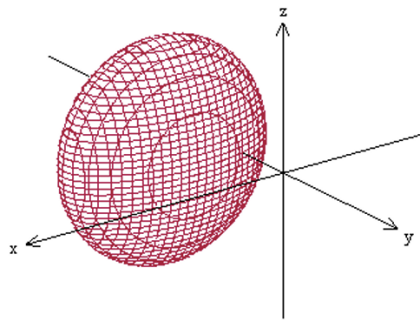
$$(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 + z^2 = 4.$$

Dividindo ambos os membros por 4 temos:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + (y + 2)^2 + \frac{z^2}{4} = 1,$$

uma equação do tipo $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$, com $d > 0$, conforme classificada por GAMA (2015), representa a equação reduzida de um elipsóide de centro $(1, -2, 0)$, ilustrada na Figura 1.

Figura 1: Representação tridimensional de um elipsoide.



Caso 2: Em certas situações, a equação da quádrlica apresenta termos mistos — isto é, pelo menos um dos coeficientes d , e ou f é não nulo. A presença desses termos está diretamente associada a rotações no sistema de coordenadas, o que dificulta a identificação direta da superfície representada. Para eliminar esses termos e simplificar a equação, é conveniente realizar uma mudança de coordenadas do tipo $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$, correspondente, do ponto de vista algébrico, a uma mudança de base entre duas bases ortonormais $\beta \sim \alpha$. Em termos práticos, isso equivale a substituir a base ortonormal canônica por uma base ortonormal composta por autovetores da matriz simétrica associada à forma quadrática, conforme será ilustrado por meio da generalização a seguir.

Considere a equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0,$$

sendo $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ números reais, com pelo menos um dos coeficientes d, e ou $f \neq 0$. Esta equação possui uma versão matricial dada por

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = [0].$$

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}.$$

Como A é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$ formada de autovetores de A . Assim, se λ_1, λ_2 e λ_3 são autovalores de A (não necessariamente distintos), existem autovetores v_1, v_2 e v_3 associados a λ_1, λ_2 e λ_3 , respectivamente, tais que $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. A matriz ortogonal $P = [I_\alpha^\beta]$, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, diagonaliza A ortogonalmente, já que $D = P^{-1}AP$ é a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

com $P^{-1} = P^t$. Portanto,

$$A = PDP^t.$$

Substituindo a igualdade acima na equação matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = [0].$$

O produto matricial $P^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é a matriz das coordenadas de um vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base β , pois

$$P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha.$$

Chamando $[v]_\beta$ de

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + [j] = [0].$$

Se $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$, temos então

$$(x' \ y' \ z') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (g \ h \ i) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + [j] = [0],$$

equivalente à equação

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + (gx_1 + hy_1 + iz_1)x' + (gx_2 + hy_2 + iz_2)y' + (gx_3 + hy_3 + iz_3)z' + j = 0.$$

Observamos que os termos cruzados $x'y'$, $x'z'$ e $y'z'$ não estão presentes, dessa forma, reduzimos este caso ao primeiro, ou seja, é suficiente completar quadrados para determinar o lugar geométrico em $\mathbb{R}^3$.

CONCLUSÕES

A partir dos estudos apresentados, verificou-se que a aplicação do Teorema Espectral permite simplificar e classificar a equação geral de quádricas em $\mathbb{R}^3$. A transformação para uma base ortonormal de autovetores elimina os termos cruzados, facilitando a identificação das superfícies, sejam elas elipsoides, hiperboloides, paraboloides ou casos degenerados.

Vale ressaltar que o Teorema Espectral garante a existência de uma base ortonormal de autovetores para qualquer matriz simétrica. A matriz associada, quando expressa nessa base, torna-se diagonal, permitindo decompor o espaço vetorial em subespaços invariantes. Essa propriedade é essencial para o estudo das quádricas, pois assegura que qualquer equação quadrática pode ser transformada, via mudança ortonormal de base, em uma forma canônica que revela diretamente a natureza geométrica da superfície representada.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

V.A contribuiu com a conceitualização, pesquisa e metodologia do projeto. M.P.A.S atuou como orientadora do projeto. Ambos os autores contribuíram com a administração do trabalho, bem como sua revisão e edição, e ambos aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

A todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

REFERÊNCIAS

- GAMA, S.S.S. **Reconhecimento de Cônicas Via diagonalizacão de Matrizes**. 2016. 50 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). UFS. São Cristovão, 2016.
- HYGINO, L.R.D. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2012. 320 p. ISBN 978-85-08-05041-6.
- OYAFUCO, K.T. **Classificação de Cônicas e Quádricas**. 2015. 76 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). Unesp. São Jose do Rio Preto, 2015
- HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 328 p. (Coleção PROFMAT, 01). ISBN 978-85-7010-231-0.