15º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2024

AMANDA NUNES[1], MAIRA PERES ALVES SANTIM[2]

[1]Estudante de Licenciatura em Matemática no IFSP- Campus Birigui
[2] Professora Universitária no IFSP- Campus Birigui

O ESTUDO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E DO NÚMERO DE OURO E SUAS APLICAÇÕES NA NATUREZA

RESUMO: Esse trabalho apresenta um estudo relacionado à Sequência de Fibonacci e a sua relação com o Número de Ouro, também conhecido como Razão Áurea. O enfoque está em mostrar conceitos e aplicações de tal sequência evidenciando sua relação com o Número de Ouro, e isso se dará por meio dos exemplos do abacaxi, do girassol e do Parthenon Grego. O estudo envolve conceitos matemáticos importantes, tais como a Geometria Plana, que se mostra na divisão áurea de um segmento e na construção do retângulo áureo e a Análise Matemática, utilizada na demonstração de uma propriedade dos números da sequência.

PALAVRAS-CHAVE: Sequência de Fibonacci; Número de Ouro; Razão Áurea

THE STUDY OF THE FIBONACCI SEQUENCE AND THE GOLDEN RATIO AND THEIR APPLICATIONS IN NATURE

ABSTRACT: This work presents a study related to the Fibonacci Sequence and its relationship with the Golden Number, also known as the Golden Ratio. The focus is on showing concepts and applications of such a sequence, highlighting its relationship with the Golden Number, and this will be done through the examples of the pineapple, the sunflower and the Greek Parthenon. The study involves important mathematical concepts, such as Plane Geometry, which is shown in the golden division of a segment and the construction of the golden rectangle, and Mathematical Analysis, used to demonstrate a property of the numbers in the sequence.

KEYWORDS: Fibonacci sequence; Golden Number; Golden Ratio

INTRODUÇÃO

É complexo determinar um ponto de partida dos números e dos sistemas de numeração dentro da matemática, no entanto, os primeiros registros que foram conservados provêm da baixa Mesopotâmia, atual Iraque. Acredita-se que a contagem, nessa época, tenha surgido da necessidade de controle de alimentos, animais, população e afins. (ROQUE, 2012, p. 25).

A pesquisa a qual este artigo está relacionado associa a existência de um número específico que têm despertado interesse em estudiosos desde a antiguidade, assim como a sua presença na natureza, no ser humano e na arte: o número de ouro.

Uma vez que a matemática está presente em quase tudo ao nosso redor, objetiva-se com este artigo evidenciar as aplicações do número de ouro ou razão áurea na natureza, mostrando que, mesmo antes da descoberta da presença da matemática em sua composição, algumas estruturas naturais visíveis aos olhos já eram tidas como perfeitas e padronizadas.

A pesquisa desenvolvida ainda conta como objetivo a investigação da secção áurea em outros elementos naturais como nas ondas, em algumas frutas e flores, nos seres humanos, na arquitetura, na arte e na música. Neste artigo, como exemplo desta aplicação, os elementos analisados foram o abacaxi, o girassol e a arquitetura do Parthernon Grego.

MATERIAL E MÉTODOS

Para essa pesquisa, primeiramente, foi realizada uma revisão de literatura para encontrar livros e artigos científicos relacionados ao tema. Após essa etapa, procedeu-se com um estudo sistemático dos conteúdos procurando compreender tanto a parte histórica quanto a matemática envolvida. A partir disso, foram estudados exemplos e aplicações da razão áurea em elementos naturais.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A descoberta dos números irracionais, denominados também como incomensuráveis, é atribuída ao matemático grego Hípaso de Metaponto (470-400 a.C.). Hípaso foi responsável por uma grande mudança de pensamento da época, onde se acreditava que tudo na matemática se reduzia apenas aos números racionais. No entanto, não se sabe ao certo quando foi que Hípaso constatou os irracionais pela primeira vez, mas pode se considerar que o tenha feito a partir das demonstrações da diagonal do quadrado ou da base de um triângulo isósceles. (Afeitos, 2013).

O número de ouro, sendo um número irracional, surge dentro de uma infinidade de elementos da natureza e na forma de uma razão, porém não se sabe ao certo quando se começou a estudá-lo. Foi no século XIX que ele foi denominado como número de ouro, razão de ouro e secção de ouro, no entanto, atualmente ele é representado também pela letra grega Φ.(Afeitos, 2013).

A primeira demonstração documentada do número de ouro foi feita no livro publicado por Euclides de Alexandria (360-295 a.C.), intitulado como *Os Elementos* em 300 a.C. A respeito do número de ouro no livro, é apresentado no volume VI, com a seguinte descrição:

"*Diz-se que um segmento de recta foi cortado na média e extrema razão quando todo o segmento está para o segmento maior assim como o segmento maior está para o mais pequeno.*"

No livro, Euclides define como seccionar um segmento $\overline{AB}$ em duas partes por um ponto C, chamado de razão extrema e média, essa secção seria dada pelo número de ouro, tal como mostra a Figura 1.

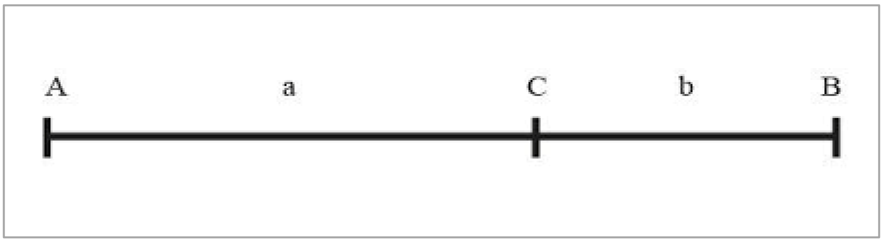

Figura 1. Segmento $\overline{AB}$ seccionado pela razão áurea.[1]

A partir dos estudos de Santos (2013), a definição do número de ouro se dá pelas seguintes etapas e cálculos:

Se tem que:

$$(\boldsymbol{I}) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

[1] Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/join/2017/TRABALHO_EV081_MD1_SA1_ID598_19082017221848.pdf

Para a determinação, considera-se:

$$(\boldsymbol{II}) \quad \begin{aligned} \overline{AB} &= x \\ \overline{AC} &= y \\ \overline{BC} &= x - y. \end{aligned}$$

Substituindo **(II)** em **(I)**:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$$

Fazendo o cálculo:

$$(\boldsymbol{III}) \quad x^2 - xy - y^2 = 0$$

Resolvendo a equação pelo teorema de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-y) \pm \sqrt{(-y)^2 - 4.1.(-y^2)}}{2.1} \rightarrow$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{5y^2}}{2} \leftrightarrow x = \frac{y \pm y\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}y$ ou $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}y$.

Segundo Santos (2013), analisamos as duas possibilidades para a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. E para isso, o autor denomina cada uma delas com φ(Phi minúsculo) e ϕ(Phi maiúsculo).

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{x}{y} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Por se tratar da distância de um segmento, o número de ouro é a razão positiva determinada pela letra grega φ. Portanto, concluindo a ideia da determinação de φ, escreve-se:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}} \cong \mathbf{1{,}6180339887498948482045868343656381177203091} \ldots$$

Associado à divisão áurea está o retângulo áureo, visto na Figura 2, que aparece quando de um retângulo ABCD qualquer se retira o quadrado ABFE, o retângulo CDEF restante será semelhante ao retângulo original.

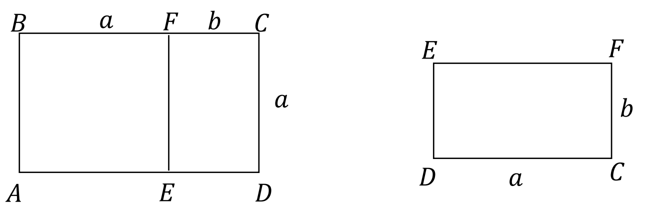

Figura 2. O retângulo áureo.[2]

Associado à divisão áurea está o retângulo áureo, que aparece quando de um retângulo ABCD qualquer retira-se o quadrado ABFE, o retângulo CDEF restante será semelhante ao retângulo original, ou seja, $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$.

Um dos grandes nomes responsáveis por estudar o número de ouro e por conseguir encontrar suas aplicações, foi Leonardo Fibonacci, nascido em 1175 na cidade de Pisa, na Itália, Fibonacci também era conhecido como Leonardo de Pisa. Uma sequência criada a partir de um problema encontrado em um dos livros de Fibonacci, intitulado como Liber Abacci, no capítulo 12 e provavelmente advindo do papiro de Rhind, era um problema da reprodução dos coelhos que dizia:

"Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro de todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?"

Em resumo, a solução para o problema foi a seguinte:

- **1°mês:** Temos um casal não fértil. (1)
- **2°mês:** O casal será fértil. (1)
- **3°mês:** Teremos dois pares de coelhos, sendo um par fértil e um par não fértil. (2)
- **4°mês:** O par fértil produzirá mais um par, enquanto o outro par ainda é não fértil e não se reproduz, totalizando 3 pares. (3)
- **5°mês:** Teremos dois pares férteis, e cada um reproduz um novo par, e ainda há um par não fértil, totalizando 5 pares. (5)
- **6°mês:** Existem três pares férteis, sendo que cada um reproduz um novo par e mais dois pares não férteis, totalizando 8 pares. (8)

Seguindo-se o mesmo raciocínio para os outros meses, obtém-se a Sequência de Fibonacci, cujos primeiros termos são: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,55,89, 144, \ldots$

Na sequência de Fibonacci, têm-se então os termos $\boldsymbol{a_0 = a_1 = 1}$, a partir disso, segue a lei de formação dada por $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_n}, \forall\, \boldsymbol{n \geq 2}$ para obter os demais elementos da sequência listada acima.

A seguir mostra-se a relação do número de ouro com a sequência de Fibonacci.

Considere a sequência dada por:

$\boldsymbol{r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, n \geq 0,}$ em que os $a'_n s$ são os elementos da sequência de Fibonacci. Ela representa a taxa de crescimento do número de coelhos entre o (n +1)-ésimo e o n-ésimo mês. Tal sequência é dada por:

$\boldsymbol{\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \ldots,}$ resultando em $(\boldsymbol{1; 2; 1,5; 1,6\overline{6};\ 1,6; 1,625; 1,615; 1,619; 1,617; 1,6181} \ldots; \ldots)$

Perceba que, à medida que a_n tende ao infinito, ou seja, à medida que aumenta o valor do numerador, o valor do quociente se aproxima do número de ouro (1,618033989).

A sequência de Fibonacci apresenta uma série de propriedades, como exemplo disso, abaixo, tem-se uma delas, relacionada a soma dos termos.

TEOREMA 1. A soma $S_n, n > 1$, dos n primeiros números da Sequência de Fibonacci é dada por: $\boldsymbol{S_n = a_{n+2} - 1}$

[2] Produzido pela autora.

DEMONSTRAÇÃO: Tem-se que:

$$\begin{gathered} a_1 = a_3 - a_2 \\ a_2 = a_4 - a_3 \\ a_3 = a_5 - a_4 \\ \vdots \\ a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \\ a_n = a_{n+2} - a_{n-1} \end{gathered}$$

Ao somar e simplificar termo a termo todas essas igualdades, obtém-se

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1$$

■

Apesar de inúmeras propriedades que contém à sequência, esta também apresenta aplicações, foco deste artigo. Abaixo, apresenta-se três destas aplicações.

EXEMPLO 1. Abacaxi.

A aplicação da sequência de Fibonacci e consequentemente, do número de ouro no abacaxi consiste em suas espirais. Um abacaxi, que se denota "perfeito" é aquele que possui, normalmente, 8 espirais voltadas para um lado e 13 voltada para o outro, podendo ainda, dependendo do ângulo das espirais, ser 13 e 21, números da sequência de Fibonacci , como pode ser visto na Figura 3.

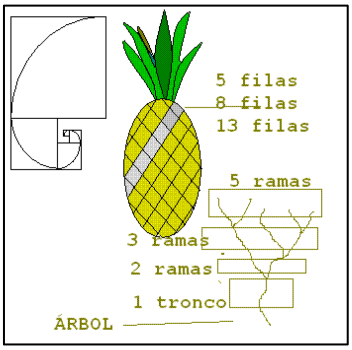

Figura 3. Espirais do Abacaxi[3]

EXEMPLO 2. Girassóis.

A aplicação do número de ouro nos girassóis é semelhante à do abacaxi, pois se relaciona com as espirais que são formadas no centro da flor. Na Figura 4, é mostrado esse padrão onde há a proporção de 34 para 21 espirais.

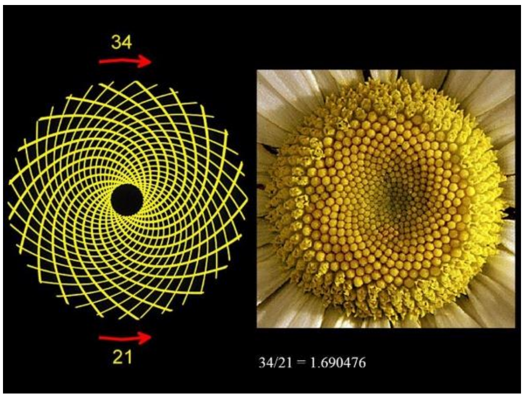

Figura 4. Aplicação do Número de Ouro no Girassol[4]

[3] Disponível em: https://atividadesescolaresprontas.com.br/sequencia-de-fibonacci-na-natureza/#google_vignette.
[4] Disponível em: https://www.cnet.com/pictures/natures-patterns-golden-spirals-and-branching-fractals/5/

EXEMPLO 3. Parthenon Grego

Em seu artigo, Lauro 2005, destaca diversas arquiteturas, uma delas, o Parthernon Grego. Neste monumento, o que aparece é o retângulo áureo. No entanto, vale lembrar que a construção do Parthernon é anterior à demonstração do número de ouro, por isso, sua construção não foi baseada neste número, no entanto, a busca por construir algo belo e próximo à perfeição resultam em medidas muito próximas a secção áurea, evidenciando mais uma vez que o descobrimento do número não é anterior à sua utilização. O retângulo áureo citado é mostrado na Figura 5, a seguir.

Figura 5. O retângulo áureo presente no Parthernon Grego[5]

CONCLUSÕES

A partir dos estudos apresentados, vimos a relação entre a sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, o uso da Análise matemática na demonstração de uma propriedade dos números dessa sequência, além da presença da geometria plana no retângulo áureo e na divisão áurea de um segmento. A construção do retângulo áureo, que foi omitida nesse trabalho, se dá por meio de régua e compasso e faz uso de diversos conceitos geométricos. O estudo não se encerra com esse trabalho, uma vez que há outras sequências que tem relação com os números de Fibonacci e o número de ouro. Fibonacci deu uma grande contribuição para a Geometria ao estudar o número de ouro e encontrar suas aplicações, uma vez que nelas há muitas propriedades interessantes relacionadas à razão áurea e vem sendo motivo de estudo há séculos por diversos matemáticos.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Todos os autores contribuíram com a revisão do trabalho e aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

A todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

REFERÊNCIAS

AFEITOS, Carlos Domingues dos. **O número de Ouro**. 2013. Tese de Doutorado. Universidade da Beira Interior.

LAURO, Maira Mendias. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Exacta**, n. 3, p. 35-48, 2005.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** 1ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 511p.

SANTOS, G. Vieira. **Explorando a Matemática do Número ϕ, o Número de Ouro.** 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92414/santos_gv_me_rcla.pdf?sequence>.

[5] Disponível em: https://chiefofdesign.com.br/proporcao-aurea/

Acesso em 18 de março de 2021.

ZAHN, Maurício. **Sequência de Finonacci e o Número de Ouro**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.,2011.