15º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2024

O USO DO SOFTWARE LIVRE GNU OCTAVE NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO EM TEMPO DISCRETO

GABRIELLY M. MONTEIRO[1], JOSÉ R. CAMPOS[2]

[1]Graduanda em Engenharia Elétrica, Bolsista PIBIC, IFSP, Câmpus Votuporanga, gabrielly.morais@aluno.ifsp.edu.br.
[2]Professor IFSP, Câmpus Votuporanga, jrcifsp@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.04.00-3 (Matemática Aplicada).

RESUMO: A teoria de controle ótimo, que surgiu nos anos 50, tem sido amplamente utilizada para resolver problemas em Matemática e Engenharia. As duas abordagens mais comuns para a solução desses problemas são o Princípio do Máximo de Pontryagin e a Programação Dinâmica. Este trabalho apresenta, de início, a formulação de problemas de controle ótimo em tempo discreto e a técnica de solução via Programação Dinâmica. Em seguida, um exemplo prático é discutido, acompanhado da implementação computacional utilizando o software livre GNU OCTAVE, que irá ilustrar a teoria apresentada.

PALAVRAS-CHAVE: programação dinâmica; controle ótimo; software livre; GNU OCTAVE.

THE USE OF GNU OCTAVE FREE SOFTWARE IN SOLVING OPTIMAL CONTROL PROBLEMS IN DISCRETE TIME

ABSTRACT: Optimal control theory, which emerged in the 1950s, has been widely used to solve problems in Mathematics and Engineering. The two most common approaches to solving these problems are Pontryagin's Maximum Principle and Dynamic Programming. This work initially presents the formulation of optimal control problems in discrete time and the solution technique via Dynamic Programming. Next, a practical example is discussed, accompanied by the computational implementation using the free software GNU OCTAVE, which will illustrate the theory presented.

KEYWORDS: dynamic programming; optimal control; free software; GNU OCTAVE.

INTRODUÇÃO

A teoria de controle ótimo apresenta grande destaque por conseguir resolver problemas diversos e importantes, dentre eles: extração de recursos naturais (Kennedy, 1986), problemas de reposição de estoque (Taha, 2008) e problemas de custo ótimo (Tena, 2001).

A Programação Dinâmica (PD) é uma técnica para resolver problemas de controle ótimo que não apresenta um grande rigor matemático quando comparada a outras técnicas de controle ótimo. Além disso, ela pode ser utilizada em uma variedade de contextos. Essa técnica visa resolver os problemas de forma eficaz decompondo um problema em estágios, onde cada um têm sua própria solução (ótima e viável) e são independentes entre si. Uma vez que a solução de algum estágio é encontrada de modo recursivo (último estágio até o primeiro), a mesma fica armazenada fazendo com que o resultado final seja ótimo e viável, sendo essa situação embasada pelo Princípio da Otimalidade de Bellman.

A programação Dinâmica também é considerada uma ferramenta cara computacionalmente, porém ela ainda é considerada muito útil uma vez que possui uma grande aplicabilidade. Neste trabalho serão expostos alguns conceitos fundamentais da Programação Dinâmica em tempo discreto, juntamente com o problema de controle ótimo em tempo discreto, assim como apresentamos um exemplo e o processo de solução computacional dele. Implementamos o algoritmo de Programação Dinâmica para o exemplo proposto no software livre GNU OCTAVE.

MATERIAIS E MÉTODOS

Este trabalho consiste em um estudo teórico realizado com consultas em livros, textos digitais, implementação computacional e simulação do problema de controle ótimo em tempo discreto por meio do algoritmo da Programação Dinâmica. Para o bom desenvolvimento deste trabalho fizemos leituras dos trabalhos citados na bibliografia e que permitiram a compreensão da teoria e a implementação da mesma para o exemplo de um modelo de uma planta (exemplo adaptado de Lewis; Syrmos; Vrabie, 86) que foi proposto. Também foram realizadas reflexões a respeito das ferramentas necessárias e propriedades observadas, sendo elas a resolução manual do exemplo e a resolução computacional através do software livre GNU OCTAVE que está instalado e disponível nos laboratórios de informática da instituição. Discussões com o orientador forem feitas para sanar as dúvidas, e também para a produção de textos com as principais conclusões e resultados obtidos.

Em suma, o grande interesse em problemas de controle ótimo em tempo discreto é de minimizar ou maximizar um funcional. Este funcional é dado por

$$g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k) \tag{1}$$

e que é conduzido pela equação de diferença

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) \tag{2}$$

em que,

N - número de vezes que o controle é aplicado;

x_k - a variável de estado;

u_k - a variável de controle;

$f_k(x_k, u_k)$ - é a dinâmica do sistema que vai evoluindo de um determinado x_k até o próximo período.

O problema de controle ótimo proposto acima pode ser resolvido usando o algoritmo de PD proposto abaixo:

Proposição 0.1. *(Bertsekas, 95) Para cada condição inicial* x_0*, o custo ótimo* $J^*(x_0)$ *do problema é igual a* $J_0(x_0)$*, onde a função* J_0 *é dada pelo último período do seguinte algoritmo que irá acontecer de modo contrário no tempo, sendo isso a equação recursiva da PD.*

Período N:

$$J_N(x_N) := g_N(x_N). \tag{3}$$

Período k:

$$J_k(x_k) = \min_{u_k \in \mu_k(x_k)} g_k(x_k, u_k) + J_{k+1}(f_k(x_k, u_k)), k = N-1, ..., 0. \tag{4}$$

Período 0:

$$J^*(x_0) = J_0(X_0). \tag{5}$$

Se $u_k^* = \mu_k^*(x_k)$ *minimizar o lado direito do período k, então a política* $\pi^* = \mu_0^*, \mu_1^*, ..., \mu_{N-1}^*$ *é ótima.*

A demonstração da proposição acima se encontra em Bertsekas (1995).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Seguindo o problema de controle ótimo e o algoritmo contextualizados acima, será apresentado um problema de um modelo de uma planta (exemplo adaptado de Lewis; Syrmos; Vrabie, 86), sendo esse exemplo resolvido computacionalmente com o software livre GNU OCTAVE. Iremos determinar qual é a sequência de controle ótimo que minimiza o índice de desempenho quadrático. O exemplo é apresentado abaixo.

Consideramos o modelo de um planta dada por

$$x_{k+1} = x_k + u_k,$$

com N=2, isto é, o período final é igual a 2. Logo, $k = 0, 1$.

Os valores que o vetor de estado x_k pode assumir são: $0, a, 2a, 3a$; e com a positivo, limitado e com valores discretos.

Os valores de controle u_k podem ser escolhidos, mas não podem violar as restrições dos estados. Os controles u_k disponíveis são: $-2a, -a, 0, a, 2a$.

Temos que $x_0 = 0, a, 2a, 3a$, são as várias condições iniciais para o problema.

A sequência de controle ótimo é: u_0^*, u_1^*. O índice de desempenho (ou funcional) será

$$J_0 = x_N^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 = x_2^2 + \frac{1}{2}(u_0^2 + u_1^2).$$

É interessante destacar $N = 2$ que facilita os cálculos e o entendimento do exemplo, mesmo que a solução seja realizada computacionalmente.

Após considerar o índice de desempenho, o objetivo passa a ser encontrar uma sequência de controles u_0^* *e* u_1^* que vai minimizar o J_0 (índice):

$$J_0 = x_2^2 + \frac{1}{2}(u_0^2 + u_1^2).$$

Agora, ajustando o problema para aplicar o algoritmo da Programação Dinâmica, obtém-se, como já exposto acima, a forma

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) = x_k + u_k,$$

com $k = 0, 1$, já que $N = 2$.

Os espaços de estados são $S_0 = S_1 = S_2 = \{0, a, 2a, 3a\}$ e o espaço de controle é o conjunto $C_k = \{-2a, -a, 0, a, 2a\}$, com $k = 0, 1$.

Fazendo as devidas substituições de u_k em $x_{k+1} = x_k + u_k$, os resultados obtidos para $x_k = 0$ serão:

$$\begin{cases} x_{0+1} = 0 + (-2a) = -2a \\ x_{0+1} = 0 + (-a) = -a \\ x_{0+1} = 0 + 0 = 0 \\ x_{0+1} = 0 + a = a \\ x_{0+1} = 0 + 2a = 2a \end{cases}.$$

Desta maneira, os valores que o estado pode assumir, inicialmente, são $\{-2a, -a, 0, a, 2a\}$, porém, somente o 0, a e o $2a$ estão no conjunto de valores admissíveis devido as restrições impostas.

Após fazer o processo acima para todos os valores de estados, obtemos a Tabela 1 abaixo.

Tabela 1: Valores de x_k e u_k que dão resultados admissíveis.

x_k	0	a	$2a$	$3a$
$U_k(x_k)$	$\{0, a, 2a\}$	$\{-a, 0, a, 2a\}$	$\{-2a, -a, 0, a\}$	$\{-2a, -a, 0\}$

Observando o custo $g_k(x_k, u_k)$ para cada período temos que:

$$\begin{aligned} g_N(x_N) &= g_2(x_2) = x_2^2; \\ g_1(x_1, u_1) &= \frac{1}{2}u_1^2; \text{ e} \\ g_0(x_0, u_0) &= \frac{1}{2}u_0^2. \end{aligned}$$

A seguir inicia o processo de solução começando com $k = N = 2$, já que no algoritmo da PD a solução é iniciada pelo último período. Depois o período considerado será o $k = N = 1$ e, por fim, o $k = N = 0$. Teremos os seguintes funcionais para cada período:

$$\begin{aligned} &J_2(x_2) = g_2(x_2) = x_2^2; \text{ com } x_2 \in S_2 = \{0, a, 2a, 3a\}; \\ &J_1(x_1) = \min_{u_1 \in U_1(x_1)} [g_1(x_1, u_1) + J_2(f_1(x_1, u_1))] = \min_{u_1 \in U_1(x_1)} \left[\frac{1}{2}u_1^2 + (x_1 + u_1)^2\right], \, x_1 \in S_1; \\ &J_0(x_0) = \min_{u_0 \in U_0(x_0)} [g_0(x_0, u_0) + J_1(f_0(x_0, u_0))] = \min_{u_0 \in U_0(x_0)} \left[\frac{1}{2}u_0^2 + J_1(x_0 + u_0)\right], \, x_0 \in S_0. \end{aligned}$$

Agora, substituindo os valores de x_k que estão definidos no espaço de estado nos funcionais J descobrimos os controles ótimos, conforme a Tabela 2. A solução completa do exemplo se encontra em Lewis (1986), sendo possível visualizar o passo a passo do processo.

Tabela 2: Sequência de controle ótimo (u_0^*, u_1^*) e seus custos ótimos, para cada valor possível de x_k.

x_0	0	a	$2a$	$3a$
(u_0^*, u_1^*)	$(0, 0)$	$(0, a)$ ou $(-a, 0)$	$(-a, -a)$	$(-a, -a)$
$J_0^*(x_0)$	0	$\frac{1}{2}a^2$	a^2	$2a^2$

O uso de softwares computacionais livres para resolver problemas práticos de Matemática e Engenharia é viável já que o mesmo permite uma melhor visualização e compreensão do problema assim como fornece também praticidade ao processo de solução, principalmente em problemas que exigem muitos cálculos. Abaixo serão apresentados os gráficos do estado e controle ótimos após a implementação e simulação do exemplo no software livre GNU OCTAVE. A escolha desse software se deu pela interface de compreensão parecida com a do MATLAB. O código que resolve o problema abaixo se encontra disponível no Github, em < https://github.com/G-mmonteiro/ic >. Para a simulação consideramos o valor de $a = 0,5$, $N = 2$ e $M = N+1$, o que permitiu a melhor compreensão dos resultados obtidos. Ainda os valores dos funcionais obtidos via simulação computacional são:0 para o estado inicial igual a 0 em $J_0^*(x_0)$, $0,1250$ para o estado inicial igual a a em $J_0^*(x_0)$, $0,2500$ para o estado inicial igual a $2a$ em $J_0^*(x_0)$ e $0,5000$ para o estado inicial igual a $3a$ em $J_0^*(x_0)$.

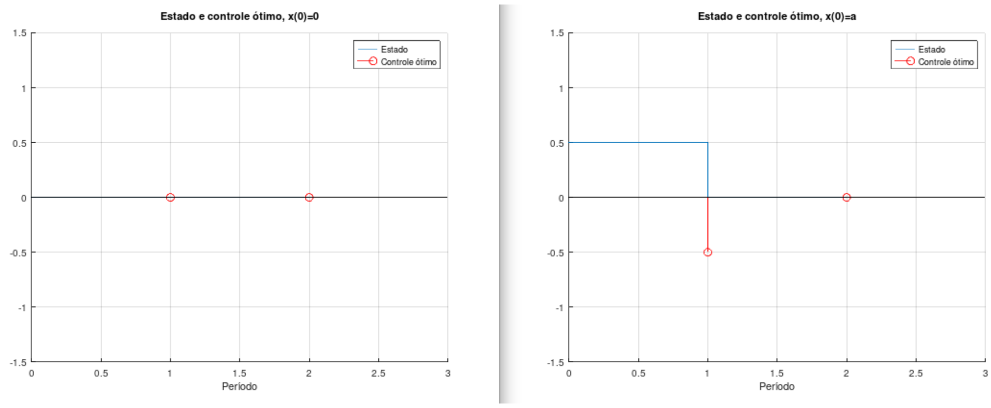

Figura 1: Estados e controles ótimos para $x(0) = 0$ e $x(0) = a$, respectivamente.

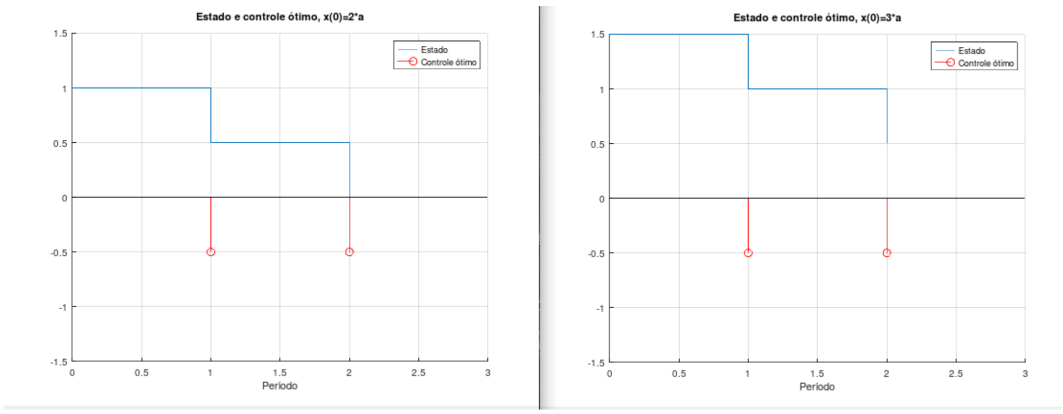

Figura 2: Estados e controles ótimos para $x(0) = 2a$ e $x(0) = 3a$, respectivamente.

Analisando as Figuras 1 e 2, e as comparando com a Tabela 2, percebemos que para $a = 0,5$ o valor do estado da Figura 1, para $x(0) = 0$ e para $x(0) = a$, fornecem resultados iguais ao da Tabela 2, e o mesmo ocorre com os controles, como era esperado. Os estados da Figura 2, sendo eles $x(0) = 2a$ e $x(0) = 3a$, também ilustram soluções que condizem com a Tabela 2, e o mesmo ocorre com os controles que representam a resposta para o exemplo proposto. Os valores dos funcionais, quando comparados aos fornecidos pela Tabela 2, em $J_0^*(x_0)$, também fornecem o mesmo resultado.

CONCLUSÕES

A Programação Dinâmica é uma técnica eficiente para a resolução de problemas de controle ótimo em tempo discreto. O problema do modelo de uma planta foi resolvido computacionalmente no software livre GNU OCTAVE, mas também poderia ser utilizado outros softwares computacionais, como o MATLAB que possui licença privada.

A resolução do exemplo, feita manualmente ou computacionalmente, apresenta muitas etapas no processo de solução e consequentemente exige muitos cálculos, sendo essa uma característica da Programação Dinâmica. O uso de softwares computacionais auxilia e facilita esse processo.

Por fim, o algoritmo da PD também pode ser adequado, modificado e implementado para diferentes problemas de controle ótimo em tempo discreto que se pretende trabalhar.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Este projeto de pesquisa consiste em um trabalho contemplado no PIBIC 2023. Os autores são a discente bolsista e o orientador, os quais, ambos contribuíram com a redação do trabalho e aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Câmpus Votuporanga pelo apoio aos alunos e professores a fim de que trabalhos científicos como esse possam ser desenvolvidos. A primeira autora agradeçe ao programa PIBIC do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), que financia este trabalho.

REFERÊNCIAS

BERTSEKAS, Dimitri P. **Dynamic programming and optimal control**. 1.ed. Belmont: Athena Scientific, 1995.

KENNEDY, John O. S. **Dynamic programming applications to agriculture and natural resources**. 1.ed. England: ELSEVIER APPLIES SCIENCE PUBLISHERS, 1986.

LEWIS, F. L.; SYRMOS, V. L.; VRABIE, D. L. **Optimal control**. 1.ed. Hoboken, Nj: Wiley, 1986.

TAHA, Hamdy A. **Pesquisa operacional**. 8.ed. São Paulo: Pearson, 2008.

TENA, Emilio Cerdá. **Optimización dinámica**. 1.ed. Madrid: Pearson Educación, 2001.