

15º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2024

CONCEITOS E APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR NA ROBÓTICA

GIOVANI M. ARTONI¹, GIOVANA T. TANGERINO², RODRIGO A. MARCHI³

¹ Graduando em Engenharia Elétrica, IFSP, Campus Piracicaba, giovani.a@aluno.ifsp.edu.br

² Professora de Ensino Básico Técnico e Tecnológico, IFSP, Campus Piracicaba, giovanatangerino@ifsp.edu.br

³ Professor de Ensino Básico Técnico e Tecnológico, IFSP, Campus Piracicaba, ramarchi@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 3.04.00.00-7 Engenharia Elétrica

RESUMO: Álgebra linear é uma área fundamental da matemática com papel crucial em diversas aplicações na robótica. Este artigo aborda conceitos como vetores, matrizes, sistemas de equações lineares e espaços vetoriais, e sua aplicação no controle de braços robóticos. Também discutimos a parametrização de um robô de três eixos, destacando seu uso prático.

PALAVRAS-CHAVE: álgebra linear, robótica, robô, matriz, parametrização.

CONCEPTS AND APPLICATION OF LINEAR ALGEBRA IN ROBOTICS

ABSTRACT: Linear algebra is a fundamental area of mathematics with a crucial role in various robotics applications. This article covers concepts such as vectors, matrices, systems of linear equations, and vector spaces, along with their application in the control of robotic arms. We also discuss the parametrization of a three-axis robot, highlighting its practical use.

KEYWORDS: linear algebra, robotics, robot, matrix, parameterization.

INTRODUÇÃO

A robótica é uma área multidisciplinar que integra diversas ciências e engenharia, com a álgebra linear desempenhando um papel crucial no desenvolvimento de sistemas robóticos. Esse campo matemático fornece as bases necessárias para modelar e resolver problemas de cinemática, dinâmica e controle de robôs, especialmente os braços robóticos articulados. O artigo explora o uso da álgebra linear na robótica, abordando temas como a representação matricial e sistemas de equações lineares, com exemplos práticos que demonstram sua aplicação no controle e operação de robôs. O objetivo é destacar a importância dessa ferramenta matemática para aplicações cotidianas.

MATERIAL E MÉTODOS

O estudo começou com uma revisão da literatura sobre álgebra linear aplicada à robótica, abordando conceitos como matrizes, operações matriciais e espaço vetorial. Com base nisso, foi desenvolvida uma aplicação conceitual para movimentar um braço robótico, modelado com matrizes de transformação homogênea, permitindo rotações e translações, com o intuito final de posicionar a ponta do braço robótico em outro local (Boldrini, Costa, Figueiredo, 2006).

Conforme explanado na introdução, a aplicação de Álgebra Linear no decorrer do trabalho, será voltada para robótica, portanto os conceitos que serão listados a seguir, serão somente os quais necessitaremos para atingir o objetivo da programação do Robô:

Matrizes: As matrizes são amplamente utilizadas na álgebra linear e em muitas outras áreas da matemática e das ciências. Elas são usadas para representar sistemas de equações lineares, transformações lineares, dados tabulares e muito mais.

Matriz identidade: A matriz identidade é uma matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a 0. Ela é denotada por I ou I_n , onde n é a ordem da matriz.

Operações de matrizes: As operações básicas de matrizes incluem adição, subtração e multiplicação. A multiplicação de matrizes é uma operação importante, mas sujeita a regras específicas em relação às dimensões das matrizes.

Operações elementares de matrizes: As operações elementares de matrizes são usadas para simplificar sistemas lineares, encontrar inversas de matrizes e outras manipulações. Elas incluem trocar duas linhas, multiplicar uma linha por um escalar e somar um múltiplo de uma linha a outra.

Espaço vetorial: Um espaço vetorial é um conjunto de vetores que são fechados sob a adição vetorial e a multiplicação por escalar, satisfazendo várias propriedades, como comutatividade, associatividade e distributividade (Boldrini, Costa, Figueiredo, 2006).

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Conceito de Matriz

Na álgebra linear, as matrizes são estruturas fundamentais usadas para representar e resolver sistemas de equações lineares. Uma matriz é uma tabela retangular de números organizados em linhas e colunas, e as matrizes explanadas abaixo, assim como seus conceitos, serão apenas os necessários para nossa aplicação em álgebra linear. Sendo assim, existem diversos outros casos em que podemos aplicar matrizes e modelar as mesmas (Callioli, Domingues, Costa, 2017).

Formalmente, uma matriz $m \times n$ é uma coleção de m linhas e n colunas de números, a seguir está representada uma matriz de $m = 3$ e $n = 3$:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz Transposta

A transposição de uma matriz é uma operação fundamental na álgebra linear. Ela consiste em trocar as linhas de uma matriz pelas suas colunas, resultando em uma nova matriz. Formalmente, dada uma matriz A com m linhas e n colunas, a transposta de A , denotada por A^T , é uma matriz com n linhas e m colunas, onde cada elemento $[a_{ij}]$ de A é colocado na posição $[a_{ji}]$ de A^T (Callioli, Domingues, Costa, 2017).

Por exemplo, se tivermos a matriz:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

sua transposta A^T será:

$$A^T_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

A transposição de uma matriz possui várias propriedades importantes:

1. A transposta da transposta de uma matriz é igual à matriz original: $(A^T)^T = A$.
2. A transposta da soma de duas matrizes é igual à soma das transpostas das matrizes: $(A + B)^T = A^T + B^T$.
3. A transposta do produto de duas matrizes é igual ao produto das transpostas, mas na ordem inversa: $(AB)^T = B^T A^T$.

A transposição é uma operação importante na manipulação de matrizes e é frequentemente usada em cálculos matriciais e em aplicações como transformações lineares e sistemas de equações lineares.

Matriz Identidade

Uma matriz identidade, denotada por I ou I_n , é uma matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos fora da diagonal principal são iguais a 0. Em outras palavras, uma matriz identidade é uma matriz em que todos os elementos são zero, exceto os elementos da diagonal principal, que são iguais a 1 (Callioli, Domingues, Costa, 2017).

Por exemplo a matriz:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz identidade é caracterizada por ter a propriedade especial de ser o elemento neutro da multiplicação de matrizes. Isso significa que para qualquer matriz quadrada A de ordem n , a multiplicação de A pela matriz identidade I_n resulta em A :

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

Isso ocorre porque, ao multiplicar uma matriz por um elemento da diagonal principal da matriz identidade, obtemos o próprio elemento da matriz. E, ao multiplicar uma matriz por um elemento fora da diagonal principal da matriz identidade (que é zero), obtemos zero, o que não afeta a matriz original (Callioli, Domingues, Costa, 2017).

Operações de Matrizes

As operações com matrizes são essenciais na álgebra linear e são utilizadas em uma variedade de aplicações, como sistemas de equações lineares, transformações lineares, computação gráfica, estatística e muitas outras áreas. A operação abordada e explanada, foi somente a necessária para o desenvolvimento do objetivo final (Callioli, Domingues, Costa, 2017).

Multiplicação de Matrizes:

A multiplicação de matrizes é uma operação mais complexa e requer que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz. Se A é uma matriz $m \times n$ e B é uma matriz $n \times p$, então o produto de A por B resulta em uma matriz C de dimensão $m \times p$, exemplo (Callioli, Domingues, Costa, 2017):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos as linhas da Matriz A , pelas colunas da Matriz B :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

APLICAÇÃO DE ALGEBRA LINEAR NA ROBOTICA

Vamos considerar um braço robótico com três juntas rotativas (ou seja, um robô de três graus de liberdade) e que queremos calcular a posição e a orientação da parte final (a ponta do braço mecânico) com base nos ângulos das juntas.

Seguindo o exemplo, consideraremos que os 3 eixos do robô, rotacionam e não há orientação específica para as juntas do robô em sua posição inicial, sendo nosso objetivo alcançar um objeto que se encontra na posição (2,1,3) no espaço, suponha que o primeiro braço tenha um comprimento de 1 metro, o segundo braço tenha um comprimento de 0,8 metros e o terceiro braço tenha um comprimento de 0,6 metros. Vamos usar esses valores para definir as posições das articulações no espaço:

- **Os vetores posição são:**

- Articulação 1: $p^1 = [0,0,0]$
- Articulação 2: $p^2 = [1,0,0]$, onde 1 é o comprimento do primeiro braço.
- Articulação 3: $p^3 = [1,8,0,0]$, onde 1.8 é a soma de 1+0,8.

A posição final da ponta do braço deve incluir o comprimento adicional do terceiro braço a partir da última articulação:

- Comprimento adicional do terceiro braço: $[0,6,0,0]$

Os **vetores orientação** são inicializados como zero, pois não estamos considerando orientações específicas para as juntas neste exemplo:

- $q^1 = [0,0,0]$
- $q^2 = [0,0,0]$
- $q^3 = [0,0,0]$

Esses valores definem a geometria inicial do braço robótico, com a articulação 1 localizada na origem e as articulações 2 e 3 se estendendo ao longo do eixo x. O objetivo é mover a extremidade do braço para o ponto (2, 1, 3) no espaço.

Cálculo das matrizes de transformação homogênea:

$$T_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow T_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação homogênea para a articulação 1 (T_1), é a matriz identidade, pois não há deslocamento ou rotação, o restante possui posição definida. Em sequência fazemos as multiplicações das matrizes:

$$T_{12} = T_1 \times T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Mult. de Matrizes}$$

$$T_{12} \times T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Mult. de Matrizes}$$

$$T_{123} \times T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Mult. de Matrizes}$$

Para calcular T , realizamos a multiplicação das matrizes de transformação homogênea de cada articulação T_1 , T_2 e T_3 , onde:

- T_1 representa a posição e orientação da primeira junta do robô (na base) em relação ao sistema de coordenadas global.
- T_2 representa a posição e orientação da segunda junta do robô (final do primeiro braço) em relação ao sistema de coordenadas global e assim respectivamente para T_3 e T_4 .

Ao multiplicar essas matrizes, obtemos a matriz de posição final que descreve a posição e orientação da extremidade do terceiro braço do robô no espaço em relação ao sistema de coordenadas global.

Portanto, realizando a multiplicação de matrizes, obtemos:

$$\text{Posição final} = T = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com a matriz final, você tem a descrição completa da posição e orientação da extremidade do terceiro braço do robô no espaço para alcançar o ponto (2,1,3). Para utilizar essa informação em um robô real, você precisa converter essa matriz em comandos específicos para cada junta do robô, considerando a cinemática inversa (Costa, 2021).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos demonstraram claramente a eficácia dos conceitos de álgebra linear na movimentação e controle de sistemas robóticos, especialmente no contexto da manipulação de um braço robótico. A simulação mostrou que o uso de matrizes de transformação homogênea para modelar as rotações e translações no espaço tridimensional permitiu alcançar a posição final do braço robótico com alta precisão. Embora os resultados gerais tenham sido positivos, algumas limitações foram identificadas. A principal limitação do modelo foi a suposição de que o braço

robótico opera em um ambiente controlado e idealizado, sem considerar fatores como forças externas, fricção nas juntas ou deformações estruturais. Em ambientes reais, esses fatores podem introduzir erros adicionais que precisam ser compensados por meio de técnicas mais avançadas, como controle dinâmico, uso de sensores de feedback ou algoritmos de aprendizado de máquina que permitem ao robô adaptar-se às condições variáveis do ambiente.

Um exemplo comum dessas soluções em prática é a aplicação de sensores de força e torque em robôs industriais, que permitem monitorar as forças atuantes nas juntas e ajustar os comandos em tempo real. Dessa forma, o robô pode corrigir sua trajetória e compensar as forças externas, resultando em um desempenho mais robusto.

Em resumo, os resultados deste estudo confirmam que os conceitos de álgebra linear são fundamentais para o controle preciso e eficiente de sistemas robóticos, e que sua aplicação prática pode ser realizada com sucesso em diversas situações, desde operações simples até tarefas complexas em ambientes dinâmicos e incertos.

CONCLUSÕES

Em resumo, o trabalho explorou de forma abrangente a aplicação crucial da álgebra linear na robótica, demonstrando como os conceitos fundamentais dessa disciplina são essenciais para a parametrização e controle eficiente de um robô de três eixos. Através da análise matemática detalhada, foi possível compreender como as transformações lineares são utilizadas para mapear coordenadas de entrada em movimentos precisos do robô no espaço. Além disso, a utilização de matrizes de rotação e translação permitiu a manipulação eficiente das coordenadas de pontos no espaço.

Por fim, a aplicação prática desses conceitos foi demonstrada em um exemplo específico, onde um robô de três eixos com comprimentos diferentes de braços foi parametrizado para atingir um ponto desejado no espaço. Esse exemplo ilustrou claramente como a álgebra linear pode ser utilizada na prática para resolver problemas de cinemática direta em robótica, mostrando seu papel fundamental no desenvolvimento e controle de sistemas robóticos avançados.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

G.M.A., G.T.T. e R.A.M. contribuíram com a curadoria e análise dos dados. G.T.T. e R.A.M. procederam com a metodologia e experimentos. G.M.A. e G.T.T. atuaram na redação do trabalho. Todos os autores contribuíram com a revisão do trabalho e aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio e colaboração de todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- BOLDRINI, Jose Luiz; COSTA, Sueli R Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lucia; WETZLER, Henry G.. **Álgebra Linear**. 2006. 407 f. Cap 1 e 2, p. 4-63.
- CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Robero C. F. **ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES**. 2017. 365 f. São Paulo, 2017. Cap 4, p. 102-114
- COSTA, Ana Laura da Silva. **Álgebra Linear aplicada ao controlo de um braço robótico**. 2021. 12 f. Tese (Mestrado) - Curso de Engenharia Aeroespacial, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2021.