

15º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2024

MÉTODO RUNGE-KUTTA APLICADO AO MODELO PREDADOR-PRESA

OSVALDO EDUARDO AIELO¹; RAYSSA PAVANI²

¹ Orientador, professor do IFSP, Campus Barretos, aiello@ifsp.edu.br.

² Graduando em Agronomia, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Campus Barretos, pavani.r@aluno.ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.00.00.00-31 Física (Ciências exatas e da Terra)

RESUMO: Este trabalho aborda a resolução do modelo clássico predador-presa de Lotka-Volterra utilizando o método numérico de Runge-Kutta nas suas variantes de segunda e quarta ordem. Primeiramente foram aplicados para analisar o caso particular de uma população composta apenas de presas. Nesse caso, a população de presas pode ser descrita por uma única equação diferencial, cuja solução analítica mostra um crescimento exponencial para esta espécie. As soluções Runge-Kutta são comparadas com a solução analítica mostrando que a de quarta ordem é mais precisa. Assim passa-se a utilizar somente a técnica de quarta ordem. O método Runge-Kutta de quarta ordem foi então aplicado ao modelo predador-presa. Foram verificados os comportamentos das soluções para três condições iniciais diferentes. Os resultados obtidos mostraram-se coerentes com a literatura sobre o modelo, mostrando que o método é eficaz na resolução dessas equações diferenciais.

PALAVRAS-CHAVE: Modelo predador-presa; Lotka-Volterra; Runge-Kutta de segunda ordem; Runge-Kutta de quarta ordem.

RUNGE-KUTTA METHOD APPLIED TO THE PREDATOR-PREY MODEL

ABSTRACT: In this study, the solution of the classical Lotka-Volterra predator-prey model using the Runge-Kutta numerical method in its second and fourth-order variants. Initially, these methods were applied to analyze the particular case of a population consisting only of prey. In this case, the prey population can be described by a single differential equation, whose analytical solution shows exponential growth for this species. The Runge-Kutta solutions were compared with the analytical solution, showing that the fourth-order method is more accurate. Therefore, only the fourth-order technique was used. The fourth-order Runge-Kutta method was then applied to the predator-prey model. The behaviors of the solutions were examined for three different initial conditions. The results obtained were consistent with the literature on the model, demonstrating that the method is effective in solving these differential equations.

KEYWORDS: Predator-prey model; Lotka-Volterra; Second-order Runge-Kutta; Fourth-order Runge-Kutta.

INTRODUÇÃO

O modelo predador-presa, proposto independentemente por Lotka e Volterra [1,2], tem sido aplicado com sucesso no estudo da dinâmica de populações de espécies interagentes. Matematicamente,

o modelo predador-presa consiste em duas equações diferenciais uma para os predadores e uma para as presas [3]. A partir de condições iniciais especificadas, a resolução das equações diferenciais fornece a evolução temporal da densidade populacional de cada uma das populações [4]. Esta modelagem determinística descreve a dinâmica das populações do sistema e, tem como resultado, oscilações estáveis para as populações de predadores e presas [5]. A persistência destas oscilações durante um tempo longo vem sendo testada teórica e experimentalmente [6]. Métodos analíticos e/ou numéricos tem sido aplicados na resolução e análise das equações do modelo predador-presa [3]. O método numérico Runge-Kutta desenvolvido por volta de 1895 pelos matemáticos alemães Carl David Tolmé Runge e Martin Wilhelm Kutta [7,8] são particularmente úteis para esta tarefa uma vez que combinam simplicidade computacional e precisão nos resultados. Neste trabalho foi aplicado o método Runge-Kutta de segunda e de quarta ordem para obter as soluções das equações diferenciais do modelo predador-presa. Num primeiro momento, optou-se por considerar uma população somente de presas, uma vez que a solução analítica é exata (uma exponencial crescente) e pôde ser usada para validar a soluções Runge-Kutta de segunda e de quarta ordem. O mesmo foi feito para uma população somente de predadores (cuja solução exata é uma exponencial decrescente como o tempo). Finalmente, o método de quarta ordem foi aplicado para resolver o sistema completo.

MATERIAL E MÉTODOS

Modelo predador-presa

O modelo predador-presa descreve a relação dinâmica da interação entre predadores e presas em um ecossistema e a evolução temporal destas populações. As suposições básicas contidas na sua formulação podem ser apresentadas da seguinte forma:

- ✓ A população de presas tem alimentação abundante e cresce exponencialmente na ausência de predadores.
- ✓ A alimentação dos predadores é composta exclusivamente das presas.
- ✓ A taxa de crescimento ou de decréscimo populacional para ambas as espécies é diretamente proporcional ao tamanho de sua própria população.
- ✓ As condições ambientais são as mesmas para as duas espécies e não favorecem nenhuma das espécies.
- ✓ A alimentação dos predadores é limitada apenas pela disponibilidade da presa.

Matematicamente, modelo predador-presa pode ser definido a partir das equações diferenciais deterministas:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X - \beta XY \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = \gamma XY - \delta Y \quad (2)$$

$X(t)$ e $Y(t)$ são as densidades da população de presas e predadores respectivamente, α é a taxa de crescimento da população de presas, β é a taxa de decréscimo de presas devido ao encontro com predadores, γ é a taxa de crescimento populacional dos predadores devido a predação e δ é a taxa de mortalidade de predadores. Para obter solução destas equações foi usado o método Runge-Kutta que será descrito a seguir.

Método Runge-Kutta

No método de Runge-Kutta, busca-se uma melhor estimativa da derivada com a avaliação da função em muitos pontos. De modo geral, o método de Runge-Kutta é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (3)$$

na qual (dx/dt) é a inclinação no interior do subintervalo de tamanho h . A ordem do método indica o número de pontos usados em um subintervalo para estimar o valor da inclinação, isto é, o método de Runge-Kutta de segunda ordem utiliza a inclinação em dois pontos, o método de terceira ordem utiliza três pontos, e assim por diante. Por exemplo, no Runge-Kutta de segunda ordem a inclinação é calculada da seguinte forma:

$$k = hf(x_n, y_n) \quad (4)$$

e

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k \right) \quad (5)$$

Assim, o método Runge-Kutta de quarta ordem é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (6)$$

Com

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f \left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1 \right) \\ k_3 &= f \left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2 \right) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned} \quad (7)$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O método Runge-Kutta de segunda e de quarta ordem foi aplicado ao modelo predador-presa. Computacionalmente o método segue o algoritmo RK:

- O procedimento começa com a definição dos valores iniciais das variáveis, X_0 e Y_0 , ou seja, as populações iniciais de presas e predadores.
- São escolhidas as taxas de crescimento e decréscimo das populações: α , β , γ e δ e valor do passo de tempo h , partindo do tempo inicial 0.
- O tempo é incrementado do valor h .
- A cada incremento de tempo, são atualizados os valores de X e Y conforme as equações (4) e (5) para o método de segunda ordem e conforme as equações (6) e (7) para a quarta ordem.
- O procedimento é repetido a partir do passo c até o tempo final escolhido.

A seguir o procedimento é aplicado a dois casos de solução analítica conhecida.

Primeiro caso: o modelo constituído apenas de presas, será descrito por uma única equação diferencial,

$$\frac{dx}{dt} = \alpha X \quad (8)$$

Cuja solução analítica é uma função exponencial crescente,

$$X = X_0 e^{\alpha(t-t_0)} \quad (9)$$

Isso mostra que, na ausência de predadores, o crescimento da população de presas se torna exponencial.

Segundo caso: na ausência de presas, a evolução temporal da população de predadores pode ser representada pela seguinte equação:

$$\frac{dY}{dt} = -\delta Y \quad (10)$$

Tendo como solução uma função exponencial decrescente:

$$Y = Y_0 e^{-\delta(t-t_0)} \quad (11)$$

A figura 1 mostra as soluções analítica, equação (9) e (11), comparada com a solução numérica das equações (8) e (10), obtidas pelo método Runge-Kutta de segunda, equações (4) e (5) e de quarta ordem, equações (6) e (7). Os parâmetros utilizados foram $\alpha=1$, $\delta=1$ e condições iniciais $X_0=1$, $Y_0=1$. O passo de tempo escolhido foi $h=0.01$.

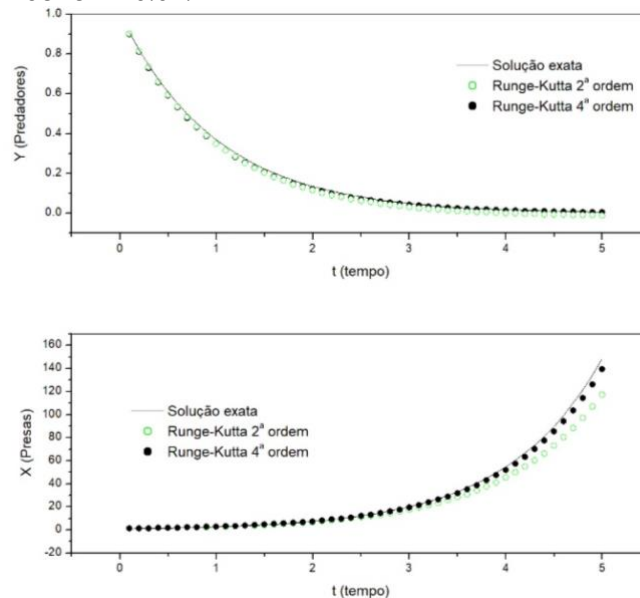


Figura 1. Soluções analíticas e numéricas para as equações (8) e (10). As condições iniciais foram $X_0=1$, $Y_0=1$. As taxas de crescimento da população de presas $\alpha=1$, e, de decréscimo de predadores na ausência de presas $\delta=1$ e o passo de tempo tomado como $h=0.01$.

Afinal, a integração numérica das equações (1) e (2) utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem, conforme descrito no algoritmo RK, permite a visualização na dinâmica das populações de predadores e presas. A série temporal retrata a natureza oscilatória do sistema, Figura 2.

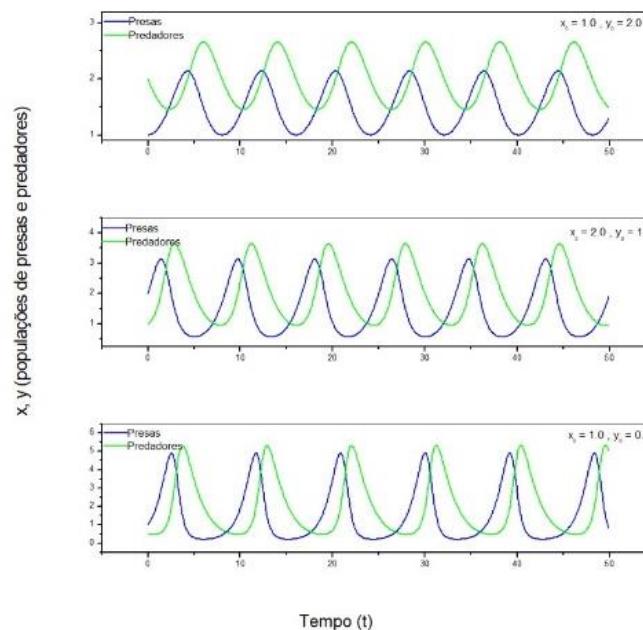


Figura 2: Variações das populações de presa (curva azul) e de predador (curva verde) em relação ao tempo t para as condições iniciais $(x_0=1.0, y_0=2.0)$, $(x_0=2, y_0=1)$ e $(x_0=1, y_0=0.5)$.

A figura 3 representa como a população de predadores se altera em função de diferentes populações de presas. O centro da figura (ponto de equilíbrio) representa a média da população de predadores e de presas, em torno da qual orbitam as duas populações. Neste modelo a órbita permanece estável.

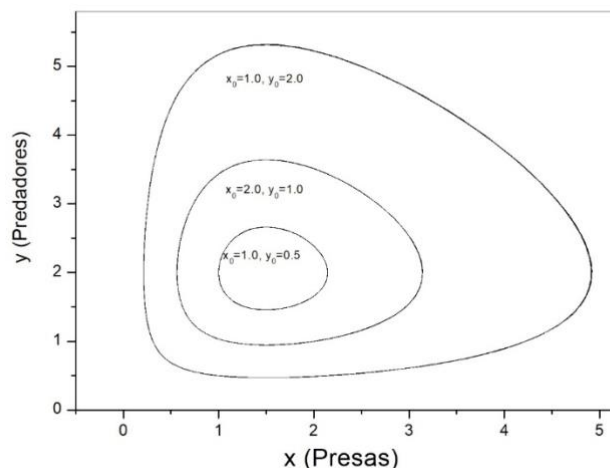


Figura 3: Retrato de fases, mostrando a variação cíclica das populações descritas pelo modelo de predador-presa (2) para as condições iniciais $(x_0=1.0, y_0=2.0)$, $(x_0=2, y_0=1)$ e $(x_0=1, y_0=0.5)$.

CONCLUSÕES

A partir dos resultados apresentados pode-se concluir que o método Runge-Kutta foi eficiente para resolver as equações diferenciais que representam o modelo predador-presa. O método de quarta ordem apresentou melhores resultados, comprovados nos casos particulares em que havia ausência de uma das populações, e por isso foi aplicado para resolver as equações completas. A série temporal assim obtida mostrou o comportamento oscilatório padrão deste modelo.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Oswaldo Eduardo Aiello e Rayssa Pavani ambos contribuíram com a execução das simulações numéricas com os métodos de Runge-Kutta, escrita do manuscrito, revisão, e ajustes finais do texto. O autor O.E.A. realizou o desenvolvimento da metodologia análise dos dados e comparação dos resultados com a literatura.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao IFSP pelo financiamento e pelo apoio institucional. A todos que contribuíram direta ou indiretamente com esse estudo, particularmente ao orientador pela sua atenção e suporte.

REFERÊNCIAS

- 1 LOTKA, A.J. Elements of physical biology. **ElemPhysBiol**, Baltimore, v. 82, p. 341–343 1926.
- 2 VOLTERRA, V. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together, In: R.N. Chapman, **Animal Ecology**, New York, 1931.
- 3 DIZ-PITA, É. ; OTERO-ESPINAR, M.V. Predator–Prey Models: A Review of Some Recent Advances, **Mathematics**, v. 9, p. 1783 2021 <https://doi.org/10.3390/math9151783>.
- 4 GRACE, W. Ecological dynamics, resilience and sustainability. **Total Environment Research Themes**, v. 3–4, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.totert.2022.100011>.

5 SASMAL, S.K.; MANDAL, D.S.; CHATTOPADHYAY, J. A predator-pest model with allee effect and pest culling and additional food provision to the predator- application to pest control. **Journal of Biological Systems**. v. 25, p. 295-326 2017.

6 HASTINGS, A. Long-term predator–prey cycles finally achieved in the lab. **Nature**, London, v . 577, p.1-2 2020. doi: 10.1038/d41586-019-03603-3.

7 TALUKDAR, A. R Comparing Runge-Kutta methods with Lotka-Volterra model. Bachelor's thesis. **Tampere University** Bachelor's degree in Science and Engineering (Technology). April 2024.

8 CELESTE, A.T.B., HOLANDA, V.H., SANTOS, D.S. Uma exposição didática do método de Runge-Kutta no estudo do pêndulo amortecido. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 46, e20240088 (2024)