

15º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2024

ESTUDO INTRODUTÓRIO SOBRE TOPOLOGIA GERAL: AXIOMAS DE SEPARAÇÃO EM ESPAÇOS METRIZÁVEIS

ANA LÍVIA GANDOLPHI BRASSIOLI¹, MÁIRA PERES ALVES SANTIM²

¹ Discente no curso Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de São Paulo (IFSP), campus Birigui.

² Mestre na Área de Automação, em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp). Atualmente é professora do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), campus Birigui.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.03.00-7 Geometria e Topologia.

RESUMO: Este artigo tem como objetivo mostrar como os axiomas de separação se aplicam em espaços metrizáveis. São apresentados definições base para o estudo de espaços métricos e topologia, como também dois resultados da aplicação de alguns axiomas de separação em espaços metrizáveis e um exemplo de um espaço não metrizável.

PALAVRAS-CHAVE: espaços métricos; topologia.

INTRODUCTORY STUDY ON TOPOLOGY: SEPARATION AXIOMS IN METRIZABLE SPACES

ABSTRACT: This article aims to show how the separation axioms apply in metrizable spaces. Basic definitions for the study of metric spaces and topology are presented, as well as two results from the application of some separation axioms in metrizable spaces and an example of a non-metrizable space.

KEYWORDS: metric space; topology.

INTRODUÇÃO

Um conjunto munido de uma função que define a distância entre quaisquer dois de seus elementos é chamado de espaço métrico, sendo essa função chamada de métrica. Em decorrência dessa métrica é possível definições como de conjuntos abertos e conjuntos fechados, bases para o estudo da topologia.

É importante notar que uma topologia em um conjunto é definida como uma coleção de subconjuntos abertos desse conjunto, que chamamos de espaço topológico. É possível que, em um espaço métrico, a métrica gere uma topologia para esse conjunto, assim teremos uma topologia induzida pela métrica e esse conjunto será chamado de espaço metrizável.

Nesse espaços, tanto topológicos quanto metrizáveis, podemos pensar dados dois pontos, ou conjuntos, o quanto distinguíveis eles são nessa topologia, para isso usamos os axiomas de separação. Neste trabalho estudaremos os axiomas de separação aplicados em espaços metrizáveis e não metrizáveis.

MATERIAIS E MÉTODOS

O trabalho foi desenvolvido a partir de uma revisão bibliográfica em livros relacionados tanto a espaços métricos quanto à topologia. Os estudos começaram com a base de espaços métricos, seguindo para a área de topologia e aprofundando nos axiomas de separação. Depois disso, uniu-se os conhecimentos em topologia e espaços métricos, estudando a aplicação dos axiomas em espaços metrizáveis.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Começamos o estudo de espaços métricos com definições de métrica, bolas aberta e fechada e conjuntos aberto e fechado, que servirão como base para a continuidade do estudo.

Definição 1. Uma **métrica** num conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$

- (i) $d(x, x) = 0$;
- (ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

A noção de bola é fundamental no estudo dos espaços métricos, como também o de vizinhança, que podem ser utilizados nas definições dos axiomas e nas demonstrações.

Definição 2. Seja a um ponto num espaço métrico X . Dado um número real $r > 0$, definimos:

- (i) O conjunto $B(a; r)$ dos pontos de X cuja distância ao ponto a é menor do que r será a **bola aberta** de centro a e raio r . Ou seja;

$$B(a; r) = \{x \in X; d(x, a) < r\}$$

- (ii) O conjunto $B[a; r]$ dos pontos de X cuja distância ao ponto a é menor do que ou igual a r será a **bola fechada** de centro a e raio r . Ou seja;

$$B[a; r] = \{x \in X; d(x, a) \leq r\}$$

- (iii) O conjunto $S(a; r)$ dos pontos de X cuja distância ao ponto a é igual a r será a **esfera** de centro a e raio r . Ou seja;

$$S(a; r) = \{x \in X; d(x, a) = r\}$$

Para os conceitos de conjunto aberto e conjunto fechado é necessário saber as definições de pontos interiores e aderentes, como também do interior e fecho de um conjunto.

Definição 3. Um ponto a se diz **interior** a um conjunto X , munido de uma métrica d , quando é centro de uma bola aberta contida em X , ou seja, quando existir $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \implies x \in X$. O conjunto dos pontos que são interiores a X é chamado de **interior**, denotado por $\text{int } X$. Portanto, escrever $a \in \text{int } X$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é interior a X .

O conjunto X será um **conjunto aberto** quando todos os seus pontos são interiores. Ou seja, $\text{int } X = X$.

Com essas definições podemos dizer que o conjunto V_x será a vizinhança de um ponto $x \in X$ quando $x \in \text{int } X$. Isto é, que V_x contém um conjunto aberto que contém x .

Definição 4. Um ponto a diz-se **aderente** a um conjunto X , munido de uma métrica d , quando, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos que são aderentes a X é chamado de **fecho**, denotado por $\overline{X}$. Portanto, escrever $a \in \overline{X}$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é aderente a X .

O conjunto X será um **conjunto fechado** quando todos os seus pontos são aderentes. Ou seja, $\overline{X} = X$.

As definições base para o estudo de topologia serão de topologia e base para uma topologia de um conjunto.

Definição 5. Uma **topologia** num conjunto X é coleção τ de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\emptyset$ e X estão em τ ;
2. A união dos elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ ;
3. A intersecção dos elementos de uma quantidade finita de subcoleções de τ está em τ .

Assim, um espaço topológico é um par ordenado (X, τ) que consiste em um conjunto X e uma topologia τ em X .

Se X é um espaço topológico com uma topologia τ , dizemos que o subconjunto U de X é um conjunto aberto de X se U pertence à coleção τ . Usando essa terminologia, podemos dizer que um espaço topológico é um conjunto X munido de uma coleção de subconjuntos de X , chamados de conjuntos abertos, em que o $\emptyset$ e o X são abertos, e que uniões arbitrárias e intersecções finitas de conjuntos abertos são abertas.

Normalmente é difícil especificar a topologia de um conjunto descrevendo toda a coleção τ de conjuntos abertos. Na maior parte dos casos, especifica-se, em vez disso, uma coleção menor de subconjuntos de X , que chamamos de base, e define-se o topologia nos termos dela.

Definição 6. Seja X um conjunto, uma *base* para a topologia do conjunto X é a coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (chamado de elementos básicos), tal que:

1. Para cada $x \in X$, existe pelo menos um elemento básico B contendo x ;
2. Se x pertence à intersecção de dois elementos básicos B_1 e B_2 , então existe um elemento básico B_3 contendo x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se $\mathcal{B}$ satisfaz essas duas condições, então definimos a **topologia τ gerada por $\mathcal{B}$** como: um subconjunto U de X é dito aberto em X (isto é, será um elemento de τ) se para cada $x \in U$ existe um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset U$. Note que cada elemento básico é um elemento de τ .

Os axiomas de separação dizem sobre o uso de significados topológicos para distinguir conjuntos disjuntos e pontos distintos. Não é o suficiente, para elementos de espaços topológicos, que dois pontos sejam distintos, é necessário que as suas vizinhanças sejam disjuntas. Bem como, não é o suficiente que dois subconjuntos de um espaço topológico sejam disjuntos, é necessário que eles sejam separados.

Há outros axiomas além dos que serão apresentados nesse trabalho, porém foram estudados apenas os espaços T_0, T_1 e T_2 .

Definição 7. Seja um espaço topológico (X, τ) , dizemos que:

- (i) X é um espaço T_0 , ou **Espaço de Kolmogorov**, se quaisquer dois pontos distintos em X são **topologicamente distinguíveis**, ou seja, sejam V_x, V_y as vizinhanças dos pontos x e y , tal que $x, y \in X$ e $x \neq y$, temos

$$\exists U \in \tau : x \in U \subseteq V_x \subseteq X : y \notin V_x$$

ou

$$\exists S \in \tau : y \in S \subseteq V_y \subseteq X : x \notin V_y$$

- (ii) X é um espaço T_1 , ou **Espaço de Fréchet**, se quaisquer dois pontos distintos em X são **separados**, ou seja, sejam $x, y \in X$, com $x \neq y$, temos

$$\exists U \in \tau : x \in U, y \notin U$$

$$\exists S \in \tau : y \in S, x \notin S$$

Sendo equivalente dizer que todo conjunto unitário é um conjunto fechado.

- (iii) X é um espaço T_2 , ou **Espaço de Hausdorff**, se quaisquer dois pontos distintos em X são **separados pela vizinhança**, ou seja, sejam $x, y \in X$, com $x \neq y$, temos

$$\exists V_x, V_y \subseteq X, \exists U, S \in \tau : x \in U \subseteq V_x, y \in S \subseteq V_y : V_x \cap V_y = \emptyset$$

sendo V_x, V_y as vizinhanças dos pontos x e y .

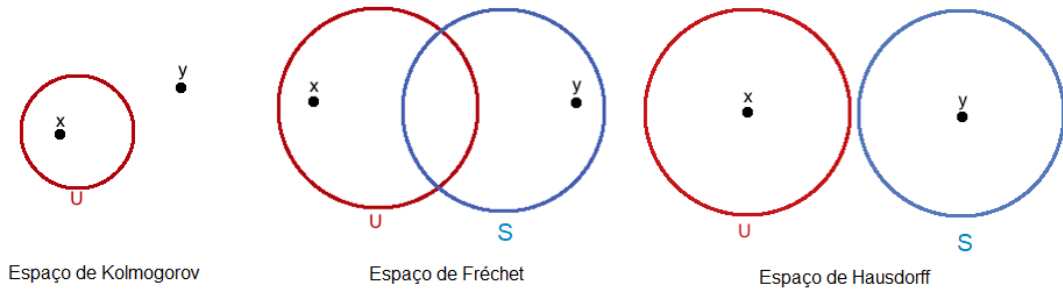


Figura 1: Relação entre dois pontos e suas vizinhanças nos espaços de Kolmogorov, de Fréchet e Hausdorff.

A Figura 1 mostra como os pontos, em cada espaço apresentados, se comporta a partir dos subconjuntos definidos e suas vizinhanças.

O Teorema mostrará a relação entre os três espaços mostrados.

Teorema 1. *Seja (X, τ) um Espaço de Hausdorff (T_2) , então (X, τ) será também um Espaço de Fréchet (T_1) e um Espaço de Kolmogorov (T_0) .*

Demonstração. $(T_2 \implies T_1)$ Como (X, τ) é um espaço de Hausdorff temos que, com $x, y \in X$ e $x \neq y$

$$\exists V_x, V_y \subseteq X, \exists U, S \in \tau : x \in U \subseteq V_x, y \in S \subseteq V_y : U \cap S = \emptyset$$

Como $U \cap S = \emptyset$, segue da definição de conjuntos disjuntos

$$x \in U \implies x \notin S$$

$$y \in S \implies y \notin U$$

Portanto, se $x \in U, y \in V$, então

$$\exists U \in \tau : x \in U, y \notin U$$

$$\exists S \in \tau : y \in S, x \notin S$$

Que é a definição de um Espaço de Fréchet (T_1) .

$(T_1 \implies T_0)$ Como (X, τ) será um Espaço de Fréchet, temos que, com $x, y \in X$ e $x \neq y$

$$\exists U \in \tau : x \in U, y \notin U$$

$$\exists S \in \tau : y \in S, x \notin S$$

Usando a regra de lógica de simplificação, temos que

$$\exists U \in \tau : x \in U, y \notin U$$

A partir disso, usando a regra de lógica de adição, temos que

$$\exists U \in \tau : x \in U, y \notin U$$

ou

$$\exists S \in \tau : y \in S, x \notin S$$

Que é a definição de um Espaço de Kolmogorov (T_0) . □

Utilizando a métrica d de um espaço X podemos definir uma topologia τ para esse conjunto utilizando a métrica d estabelecida. Assim, encontrando uma topologia induzida por uma métrica e um espaço metrizável.

Definição 8. Seja X um conjunto munido da métrica d , então a coleção de bolas abertas $B_d = (x, \varepsilon)$, para $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, é uma base para a topologia em X , chamada de **topologia induzida por uma métrica**.

Definição 9. Se (X, τ) é um espaço topológico, X será dito **metrizável** se existe uma métrica d no conjunto X que induz a topologia τ . Um espaço métrico é um espaço metrizável X munido de uma métrica específica d que gera a topologia de X .

O próximo Teorema mostrará como um espaço metrizável se comporta nos axiomas de separação apresentados.

Teorema 2. *Seja (X, τ) um espaço metrizável munido de uma métrica d , tal que a topologia τ é induzida pela métrica d . Então, o espaço X é um espaço de Hausdorff, de Fréchet e de Kolmogorov.*

Demonstração. Começamos a demonstração com o Espaço de Hausdorff.

Seja (X, τ) um espaço metrizável munido de uma métrica d , tal que a topologia τ é induzida pela métrica d . Então, o espaço X é um espaço de Hausdorff.

Suponhamos que X não é Hausdorff, ou seja,

$\exists x, y \in X : x \neq y$ tal que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \exists z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$$

Em que $B_\varepsilon(x)$ é a bola aberta de x em X .

Seja $r = \frac{d(x, y)}{2}$ e $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$, pela definição de intersecção de conjuntos, temos:

$$z \in B_r(x) \text{ e } z \in B_r(y)$$

Pela definição de bola aberta, temos:

$$d(x, z) < r \text{ e } d(y, z) < r$$

$$\implies d(x, z) + d(y, z) < 2r$$

$$\implies d(x, z) + d(y, z) < d(x, y)$$

Chegamos, assim, em um absurdo, afinal contradiz o axioma (iv) dos Axiomas 1 de Espaços Métricos. O absurdo surgiu ao assumirmos que o espaço X não é um espaço de Hausdorff. Portanto, X é um espaço de Hausdorff.

A partir do Teorema 1, como X é um espaço de Hausdorff, podemos afirmar também que X é um espaço de Fréchet e um espaço de Kolmogorov.

Portanto, se (X, τ) é um espaço metrizável munido de uma métrica d , tal que a topologia τ é induzida pela métrica d . Então, o espaço X é um espaço de Hausdorff, de Fréchet e de Kolmogorov. $\square$

Há espaços não metrizáveis que não iram cumprir nenhum axioma de separação, outros podem cumprir algum axioma mais "fraco" (como o Espaço de Kolmogorov). Há consequências que esses espaços vão sofrer por não cumprir determinado axioma, como por exemplo a perda de unicidade de limite em espaços que não são, pelo menos, Espaços de Hausdorff.

Observe, por exemplo, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e $\tau = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus X \text{ finito}\}$ uma topologia em $\mathbb{R}$, chamada topologia cofinita. Tal topologia é não metrizável e podemos demonstrá-la por absurdo.

Suponha que $\mathbb{R}$ é infinito e a topologia cofinita está associada a uma métrica d . Sejam x, y elementos distintos de $\mathbb{R}$ e seja $\varepsilon = \frac{d(x, y)}{2} \in \mathbb{R}^+$.

Como $B(x, \varepsilon)$ e $B(y, \varepsilon)$ são abertos, $\mathbb{R} \setminus B(x, \varepsilon)$ e $\mathbb{R} \setminus B(y, \varepsilon)$ são finitos. Portanto $B(x, \varepsilon)$ e $B(y, \varepsilon)$ são infinitos.

Se existisse $z \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$, então

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\varepsilon = d(x, y)$$

o que é absurdo. Logo $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$. Donde $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus B(y, \varepsilon)$, o que é absurdo, pois $B(x, \varepsilon)$ é infinito enquanto $\mathbb{R} \setminus B(y, \varepsilon)$ é finito.

O absurdo surgiu de supormos que a topologia cofinita está associada a uma métrica d . Portanto, a topologia cofinita não é metrizável.

Esse espaço topológico não será um espaço de Hausdorff. Afinal sejam x, y pontos distintos em $\mathbb{R}$. A vizinhança V_x do ponto x será um conjunto aberto, portanto $\mathbb{R} \setminus V_x$ é finito. Portanto, para que V_y , vizinhança do ponto y , seja disjunto de V_x a vizinhança de y teria que ser finita, o que tornaria $\mathbb{R} \setminus V_y$ infinito, assim V_y não seria aberto, o que é um absurdo.

Podemos definir nesse espaço topológico uma sequência injetora $(x_n : n \in \mathbb{N})$, então a sequência converge para x , para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos demonstrar isso pegando um ponto $x \in \mathbb{R}$ e V_x , então $\mathbb{R} \setminus V_x$ é finito. Como $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é injetora, existe N tal que $x_n \notin \mathbb{R} \setminus V_x$ para todo $n \geq N$. Como V_x é uma vizinhança aberta arbitrária, segue que $(x_n : n \in \mathbb{N})$ converge para x .

Para que o limite seja único precisamos de axiomas de separação em que os abertos não separem apenas os pontos, mas que separem as vizinhanças desses pontos, como o espaço de Hausdorff. Por esse motivo no espaço topológico $(\mathbb{R}, \tau)$, com a topologia cofinita, os limites das sequências injetoras não são únicos.

CONCLUSÕES

A partir dos estudos apresentados, notou-se a importância do estudo de espaços métricos para a topologia. De fato, os conceitos de bolas abertas e fechadas, esferas, conjuntos abertos e fechados e vizinhanças são muito utilizados, sendo importantes para algumas definições de base no estudo de topologia geral. Tais conceitos dos espaços métricos também proporciona possibilidades de estudos mais aprofundados na topologia, levando a espaços topológicos mais abstratos.

Além disso, no estudo apresentado é mostrado a importância de um conjunto metrizável, utilizando conceitos métricos e topológicos, para os axiomas de separação, evidenciando como o conjunto satisfaz os axiomas apresentados. E também como conjuntos não metrizáveis, além de, algumas vezes, não cumprir todos os axiomas, apresentam consequências por não os cumprirem, como no exemplo mostrado que, por não ser um espaço de Hausdorff, não apresentava limite único.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

A.L.G.B contribuiu com a conceitualização, pesquisa e metodologia do projeto. M.P.A.S atuou como orientadora do projeto. Ambas as autoras contribuíram com a administração do trabalho, bem como sua revisão e edição, e ambos aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

A todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Espaços métricos e introdução à topologia**. São Paulo: Atual, 1982. 183 p.

LIMA, Elon Lages. **Elementos de topologia geral**. 3. Ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. 297 p.

LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 5. Ed. Rio de Janeiro: IMPA (Projeto Euclides), 2017. 337 p.

MUNKRES, James. **Topology**. 2. Ed. Londres: Pearson Education Limited, 2014. 503 p.

SUTHERLAND, Wilson A. **Introduction to Metric and Topological Spaces**. 2. Ed. Nova Iorque: Oxford University Press, 2009. 220 p.