15º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2024

A Lei dos Módulos como ferramenta para construção dos Números Quatérnios

Marcos José de Lima Filho[1], Dalton Couto Silva[2]

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática, IFSP, Campus Caraguatatuba, lima.filho@aluno.ifsp.edu.br.
[2] Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico, IFSP, Campus Caraguatatuba, dalton.couto@ifsp.edu.br

Área de conhecimento: 1.01.01.05-5 Álgebra Comutativa.

RESUMO: Neste trabalho, temos o objetivo de estudar a tentativa de William Rowan Hamilton, no século XIX, de construir um conjunto de ternas de números reais que generalizasse o conjunto dos números complexos. Vamos utilizar a Lei dos Módulos para entender porquê essa generalização falha quando consideramos ternas de números reais, e como ela foi decisiva para levar à construção do conjunto dos números quatérnios.

PALAVRAS-CHAVE: William Rowan Hamilton; complexos; álgebras; operações.

The Module Law as a tool for the construction of Quaternions

ABSTRACT: In this work, we aim to study the atempt by William Rowan Hamilton, in the XIX century, to construct a set of triples of real numbers, such that the set of complex numbers is a subset. We will utilize the Module Law to understand why this construction fails with triples of real numbers, and how it was decisive for the construction of the set of quaternions.

KEYWORDS: William Rowan Hamilton; complex numbers; algebras; operations.

INTRODUÇÃO

No início do século XIX, o conjunto dos números complexos já era bastante conhecido. Eles eram definidos como $a+bi$, onde a e b são números reais e i é um número tal que $i^2 = -1$, com as operações de adição e a multiplicação usuais. Com as operações dos números complexos, não é difícil mostrar que a adição e a multiplicação são comutativas e associativas, e que a multiplicação é distributiva em relação à adição.

Ainda no século XIX, parecia inconcebível que pudesse haver uma álgebra diferente da álgebra comum da aritmética, ou seja, das álgebras dos números reais e dos números complexos. Tentar, por exemplo, a construção de uma álgebra consistente na qual não se verificasse a lei comutativa da multiplicação não só provavelmente não ocorria a ninguém na época, como também, se ocorresse, certamente seria descartada por parecer uma ideia ridícula. Era essa a impressão sobre os conjuntos numéricos quando, em 1843, William Rowan Hamilton foi levado a desenvolver uma álgebra em que a lei comutativa da multiplicação não valia.

O conjunto dos números complexos é extremamente conveniente para o estudo dos vetores e das rotações do plano. Hamilton percebia que seus pares ordenados podiam ser pensados como entidades orientadas no plano e, naturalmente, tentou estender a ideia a três dimensões, passando do número complexo binário $a + bi$ às triplas ordenadas $a + bi + cj$.

Neste trabalho, temos o objetivo de estudar a tentativa de Hamilton de criar um conjunto de números formados por triplas ordenadas $a + bi + cj$, munidas de operações de adição e multiplicação com as propriedades associativa e distributiva, e entender porquê Hamilton não obteve sucesso nessa tentativa. Para tanto, a metodologia utilizada foi a seguinte: estudamos a teoria desenvolvida por Hamilton em um de seus trabalhos originais (HAMILTON, 1853), além de realizar fichamentos e estudos da dissertação de mestrado em (PALHARES, 2018) e do artigo (MUÑOZ, 2011).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Antes de partir para os quádruplos de números reais, Hamilton tentou encontrar uma teoria sólida utilizando triplas. Vejamos como se desenrolou esse processo.

Hamilton considerou a representação $a + bi + cj$, com a, b, c números reais e $i^2 = j^2 = -1$. Com relação à operação de soma, era fácil notar que o conjunto era fechado:

$$(a + bi + cj) + (d + ei + fj) = a + bi + cj + d + ei + fj = (a + d) + (b + e)i + (c + f)j$$

Contudo, Hamilton encontrou uma grande dificuldade com a operação de multiplicação para os novos números. O produto entre dois números resultaria o seguinte número:

$$\begin{aligned}&(a + bi + cj) \cdot (d + ei + fj) = ad + aei + afj + dbi + bei^2 + bfij + dcj + ecij + cfj^2 \\ &= (ad - be - cf) + (ae + db)i + (af + dc)j + (bf + ec)ij.\end{aligned}$$

Portanto, é notório a presença de um termo ij não definido anteriormente na definição proposta por Hamilton. Uma forma de contornar esse problema seria definir esse termo na expressão de um quarto termo, coisa que Hamilton, a princípio, não concordou.

Isso evidencia a dificuldade de Hamilton em tentar definir o produto dessas triplas. Assim, Hamilton procurou utilizar uma propriedade que é válida no conjunto do números complexos para deixar claro qual deveria ser a forma correta de multiplicar dois ternos de números. O módulo de um número complexo $a + bi$ é dado por $\sqrt{a^2 + b^2}$, e sabemos que o produto do módulo de dois números complexos resulta no módulo do produto desses dois números, propriedade que Hamilton denominou como Lei dos Módulos.

Hamilton então buscou expandir esta propriedade para as ternas de três dimensões. Para o quadrado de duas ternas, teremos:

$$\begin{aligned}|(a + bi + cj)^2| &= |(a^2 - b^2 - c^2) + 2abi + 2acj + 2bcij| \\ &= \sqrt{(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2} \\ &= \sqrt{a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - a^2b^2 + b^4 + b^2c^2 - a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 6b^2c^2 + 2a^2c^2 + c^4}\end{aligned}$$

e, por outro lado:

$$|(a + bi + cj)|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Desse modo, devemos ter a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 6b^2c^2 + 2a^2c^2 + c^4} = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow \\
&a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 6b^2c^2 + 2a^2c^2 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \Leftrightarrow \\
&a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 6b^2c^2 + 2a^2c^2 + c^4 = a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4 \Leftrightarrow \\
&4b^2c^2 = 0 \Leftrightarrow (bc)^2 = 0 \Leftrightarrow bc = 0
\end{aligned}$$

E isso é válido se, e somente se, $b = 0$ ou $c = 0$. Ou seja, podemos concluir que, em qualquer um dos casos voltaríamos a um complexo de duas dimensões. Dessa forma, Hamilton teve de utilizar outro artifício, conforme Muñoz (2011, p. 17).

"Às vezes fui tentado a considerar $ij = 0$. Mas achei estranho e desconfortável, e percebi que a mesma supressão do termo indesejado poderia ser obtida assumindo algo que me parecia menos violento, ou seja, que $ji = -ij$. Assim, considerei que $ij = k, ji = -k$, reservando-me a consideração de se k era nulo ou não."

O raciocínio de Hamilton era de que, se a ordem do produto fosse respeitada, haveria dois termos envolvidos no produto de i e j, ou seja, $2bcij$ poderia ser escrito como $bc(ij + ji)$. A Lei dos Módulos seria satisfeita se tomasse $ij + ji = 0$, sem considerar separadamente nem ij nem ji nulos.

Com isso, o passo seguinte agora era generalizar o produto de triplas considerando que $ij = -ji = k$. Hamilton então calculou o produto:

$$\begin{aligned}
(a + bi + cj) \cdot (d + ei + fj) &= ad + aei + afj + bdi + bei^2 + bfij + cdj + ceji + cfj^2 \\
&= (ad - be - cf) + (ae + bd)i + (af + cd)j + (bf - ce)k
\end{aligned}$$

Contudo, Hamilton ainda não considerava a presença da quarta dimensão e por esse motivo considerou $k = 0$. Voltemos agora na verificação da Lei dos Módulos para dois ternos quaisquer de três dimensões com o produto dos módulos:

$$\begin{aligned}
&|(a + bi + cj)| \cdot |(d + ei + fj)| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \\
&= \sqrt{a^2d^2 + a^2e^2 + a^2f^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + b^2f^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + c^2f^2}
\end{aligned}$$

e também o módulo do produto:

$$\begin{aligned}
&|(a + bi + cj)(d + ei + fj)| = |(ad - be - cf) + (ae + bd)i + (af + cd)j| \\
&= \sqrt{(ad - bd - cf)^2 + (ae + bd)^2 + (af + cd)^2} \\
&= \sqrt{a^2d^2 - 2adbe - 2adcf + 2becf + b^2e^2 + c^2f^2 + a^2e^2 + 2aebd + b^2d^2 + a^2f^2 + 2afcd + c^2d^2} \\
&= \sqrt{a^2d^2 + b^2e^2 + c^2f^2 + a^2e^2 + b^2d^2 + a^2f^2 + c^2d^2 + 2bcef}.
\end{aligned}$$

Com isso, basta satisfazermos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a^2d^2 + a^2e^2 + a^2f^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + b^2f^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + c^2f^2} = \\
&\sqrt{a^2d^2 + b^2e^2 + c^2f^2 + a^2e^2 + b^2d^2 + a^2f^2 + c^2d^2 + 2bcef} \\
&\Leftrightarrow a^2d^2 + a^2e^2 + a^2f^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + b^2f^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + c^2f^2 \\
&= a^2d^2 + b^2e^2 + c^2f^2 + a^2e^2 + b^2d^2 + a^2f^2 + c^2d^2 + 2bcef \\
&\Leftrightarrow b^2f^2 + c^2e^2 - 2bcef = 0 \Leftrightarrow (bf)^2 - 2(bf)(ce) + (ce)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (bf - ce)^2 = 0 \Leftrightarrow bf - ce = 0 \Leftrightarrow bf = ce.
\end{aligned}$$

Assim, percebe-se novamente que não é possível obter a igualdade partindo de quaisquer dois elementos, pois devemos respeitar a condição $bf = ce$, ou seja, a Lei dos Módulos não fica bem enunciada para as triplas.

Hamilton se dedicou a este problema por praticamente dez anos com um impasse nos seus cálculos, pois se $k \neq 0$ teríamos mais uma dimensão, e se $k = 0$ não satisfazemos a Lei dos Módulos. De acordo com Muñoz (2011), os filhos de Hamilton de certa forma participavam com carinho das esperanças e decepções de seu pai à medida que as pesquisas aconteciam, perguntavam-lhe:

"Bem, papai, você já pode multiplicar as tríades?"

ao que Hamilton respondia balançando a cabeça tristemente:

"Não. Por enquanto, só posso somá-las e subtraí-las."

Depois de longos anos de trabalho, em 16 de outubro de 1843, em um passeio com sua esposa pela ponte do Royal Canal, em Dublin, Hamilton presenciou um momento extraordinário trazendo luz a escuridão de seus problemas, Hamilton descreveu esse momento em uma carta para um de seus filhos, quinze anos depois :

"Amanhã será o décimo quinto aniversário dos quatérnios. Eles surgiram na vida, ou na luz, já crescidos, em 16 de outubro de 1843, quando eu estava caminhando com a Sra. Hamilton em direção a Dublin, e chegamos a Ponte Broughman. Ou seja, então e ali, fechei o circuito galvânico do pensamento e as faíscas que caíram foram as equações fundamentais entre i, j, k; exatamente como as usei desde então. Tirei, naquele momento, um caderno de bolso, que ainda existe, e fiz uma anotação, sobre a qual, naquele mesmo instante, senti que seria valioso estender meu trabalho por pelo menos dez (ou podiam ser quinze) anos por vir. É justo dizer que isso aconteceu porque senti, naquele momento, que um problema havia sido resolvido, um desejo intelectual aliviado, desejo que me perseguia há pelo menos quinze anos anteriores. Não pude resistir ao impulso de pegar minha faca e gravar em uma pedra da Ponte Brougham a fórmula fundamental com os símbolos i, j, k:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

que continham a solução do Problema, que desde então sobrevive como inscrição."

Hamilton, agora em posse dessas novas identidades enunciou os quatérnios, sendo números hipercomplexos com forma $a + bi + cj + dk$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e i,j, e k são as partes imaginárias que satisfazem as relações $k = ij = -ji$ e $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, já que

$$k^2 = (ij)(ij) - (ji)(ij) = -ji^2j = j^2 = -1$$

tendo isso em mãos, Hamilton passou a verificar a Lei dos Módulos para esses elementos hipercomplexos. Começando pelo módulo do produto:

$$
\begin{aligned}
&|(a + bi + cj + dk) \cdot (x + yi + zj + wk)| \\
&= |ax + ayi + azj + awk + bxi + byi^2 + bzij + bwik + cxj \\
&+ cyji + czj^2 + cwjk + dxk + dyki + dzkj + dwk^2| \\
&= |ax + ayi + azj + awk + bxi - by + bzk + bwik \\
&+ cxj - cyk - cz + cwjk + dxk + dyki + dzkj - dw| \\
&= |(ax - by - cz - dw) + (ay + bx)i + (az + cx)j \\
&+ (aw + dx + bz - cy)k + bwik + cwjk + dyki + dzkj|.
\end{aligned}
$$

Fica evidente agora a necessidade de encontrar os valores de ik, jk, ki e kj para continuar os cálculos. Hamilton concluiu que:

"...provavelmente temos que $ik = -j$, porque $ik = iij = i^2j = -j$; desse modo, podemos esperar encontrar que $kj = ijj = ij^2 = -i$."

Pela propriedade associativa, podemos definir também que $ki = (-ji)i = -j(i^2) = -j(-1) = j$. Porém Hamilton escolheu outro caminho para chegar aos mesmos resultados:

"...dela eu considerei que $ki = j$ e $jk = i$, porque parecia evidente que, se $ji = -ij$, deveríamos ter que $kj = -jk$ e $ik = -ki$."

Isto posto, Hamilton então tinha todas as "assunções"do produto (como Hamilton as chamava) para os números hipercomplexos, seriam elas:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \tag{1}$$

$$ij = -ji = k \tag{2}$$

$$jk = -kj = i \tag{3}$$

$$ki = -ik = j \tag{4}$$

podendo essas quatro equações serem resumidas em apenas uma:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{5}$$

Retornando a Lei dos Módulos, temos então que:

$$
\begin{aligned}
&|(ax - by - cz - dw) + (ay + bx)i + (az + cx)j + (aw + dx + bz - cy)k + bwik + cwjk + dyki + dzkj| \\
&= |\underbrace{(ax - by - cz - dw)}_{A} + \underbrace{(ay + bx + cw - dz)}_{B}i + \underbrace{(az + cx + dy - bw)}_{C}j + \underbrace{(aw + dx + bz - cy)}_{D}k| \\
&= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$A^2 = (ax)^2 - 2axby - 2axcz - 2axdw + (by)^2 + 2bycz + 2bydw + (cz)^2 + 2czdw + (dw)^2$$

$$B^2 = (ay)^2 + 2aybx + 2aycw - 2aydz + (bx)^2 + 2bxcw - 2bxdz + (cw)^2 - 2cwdz + (dz)^2$$

$$C^2 = (az)^2 + 2azcx + 2azdy - 2azbw + (cx)^2 + 2cxdy - 2cxbw + (dy)^2 - 2dybw + (bw)^2$$

$$D^2 = (aw)^2 + 2awdx + 2awbz - 2awcy + (dx)^2 + 2dxbz - 2dxcy + (bz)^2 - 2bzcy + (cy)^2$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A^2+B^2+C^2+D^2 &= (ax)^2+(by)^2+(cz)^2+(dw)^2+(ay)^2+(bx)^2+(cw)^2+(dz)^2 \\
&+ (az)^2+(cx)^2+(dy)^2+(bw)^2+(aw)^2+(dx)^2+(bz)^2+(cy)^2 \\
&= a^2(x^2+y^2+w^2+z^2)+b^2(x^2+y^2+w^2+z^2) \\
&+ c^2(x^2+y^2+w^2+z^2)+d^2(x^2+y^2+w^2+z^2) \\
&= (a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+w^2+z^2)
\end{aligned}$$

Retornando agora à equação:

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+w^2+z^2)} = |a+bi+cj+dk| \cdot |x+yi+zj+wk|$$

E desse modo, fica constatado que os quatérnios satisfazem a Lei dos Módulos, isto é, o módulo de um produto entre quatérnios é igual ao produto dos módulos. Tendo agora esta propriedade verificada e suas identidades definidas, o conjuntos dos quatérnios recebeu o símbolo $\mathbb{H}$, uma homenagem a seu criador.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentada uma pequena amostra da história, através da biografia de Hamilton e uma parte de sua teoria Matemática. Com isso, esperamos que o leitor possa complementar seus conhecimentos matemáticos através de importantes conexões com a História da Matemática, que levaram ao desenvolvimento científico.

Procuramos evidenciar as dificuldades que foram encontradas por Hamilton em suas pesquisas, com o propósito de mostrar que os erros também podem ser importantes para a construção do conhecimento, o que visa combater uma percepção negativa, encontrada nos estudantes, à respeito dos erros nas disciplinas de Matemática.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Os autores Marcos José de Lima Filho e Dalton Couto Silva contribuíram com a pesquisa, a escrita, a revisão do trabalho e aprovaram a versão submetida.

REFERÊNCIAS

HAMILTON, W. R. *Lectures on Quaternions.* [S.l.]: Hodges and Smith, 1853. 872 p.

MUÑOZ, J. M. S. Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones. *Pensamiento matemático*, Grupo de Innovación Educativa, n. 1, p. 27, 2011.

PALHARES, M. M. dos S. Uma introdução aos quatérnios. *UFMS*, p. 59, 2018.