

## 15º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2024

### ESTUDO DE BIFURCAÇÕES EM SISTEMAS BIDIMENSIONAIS ATRAVÉS DE ANIMAÇÕES

GUSTAVO MORATO DE MARCHI SOARES<sup>1</sup>, FABRICIO FERNANDO ALVES<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Graduando em Engenharia Elétrica, Bolsista PIBIFSP, IFSP-PEP, gustavo.morato@aluno.ifsp.edu.br.

<sup>2</sup>Doutor em Matemática; IFSP-PEP; Presidente Epitácio; SP; fabricio.alves@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.02.04-3 Equações Diferenciais Ordinárias.

**RESUMO:** Bifurcações são relevantes em diversos modelos como para dinâmica populacional e circuitos elétricos. Devido a isso, o presente trabalho apresenta os principais tipos de bifurcações em sistemas de EDO bidimensionais, sela-nó, transcritical, forquilha e Hopf, através de 4 exemplos em conjunto com animações dos retratos de fase e das respostas temporais dos mesmos. As animações foram feitas através da biblioteca *matplotlib* em *Python* e disponibilizadas no Github, de forma a melhor ilustrar a mudança dos comportamentos qualitativos dos sistemas.

**PALAVRAS-CHAVE:** sistemas dinâmicos; sistemas não-lineares; teoria de bifurcações; Python.

### STUDY OF BIFURCATIONS IN TWO-DIMENSIONAL SYSTEMS THROUGH ANIMATIONS

**ABSTRACT:** Bifurcations are relevant in several models, such as population dynamics and electrical circuits. Therefore, this work presents the main types of bifurcations in two-dimensional ODE systems, saddle-node, transcritical, fork and Hopf, through 4 examples together with animations of the phase portraits and their temporal responses. The animations were made using the *matplotlib* library in *Python* and made available on Github, in order to better illustrate the change in the qualitative behaviors of the systems.

**KEYWORDS:** dynamical systems; nonlinear systems; bifurcation theory; Python.

### INTRODUÇÃO

Uma bifurcação, de forma intuitiva, ocorre quando um sistema altera seu comportamento qualitativo conforme a mudança de um parâmetro. O significado físico de tal fenômeno varia conforme o que o sistema modela, de forma que é um ponto de interesse para compreensão de modelos como por exemplo: circuitos elétricos (GEORGIU; ROMEO, 2015) e dinâmica populacional (XU et al., 2024). Esse trabalho apresenta 4 exemplos ilustrando bifurcações do tipo sela-nó, transcritical, forquilha e Hopf, onde para cada exemplo foi montada uma animação em *Python* com o intuito de melhor ilustrar os fenômenos de bifurcações, disponível em: <<https://github.com/MoratoZ/Estudo-de-bifurcoes-em-sistemas-bidimensionais-atraves-de-animacoes>>.

## MATERIAIS E MÉTODOS

É possível definir uma bifurcação pelo conceito de estabilidade estrutural, conforme os resultados apresentados abaixo.

**Definição 1.** *Um campo vetorial  $\vec{f} \in \mathbb{R}^2$  diferenciável é considerado estruturalmente estável se pequenas perturbações no sistema  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(x)$  não alteram seu comportamento qualitativo.*

O teorema de Peixoto (GUCKENHEIMER; HOLMES, 2013) é útil para determinar se um sistema é estruturalmente estável. Nesse texto é apresentado uma versão particular para 2 dimensões; todavia o resultado original é mais geral.

**Teorema 1.** *(Peixoto, no  $\mathbb{R}^2$ )* *Seja o campo vetorial  $\vec{f}$  diferenciável em um conjunto compacto  $D$ . Então  $\vec{f}$  é estruturalmente estável em  $D$  se, e somente se, o número de pontos críticos e ciclos limites for finito e todos são hiperbólicos, e não existirem trajetórias conectando pontos de sela a pontos de sela.*

A demonstração do Teorema 1 é feita em Guckenheimer e Holmes (2013). Dessa forma, considerando um sistema  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(x, \mu)$ , onde  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ , um valor  $\mu_0$  para o qual  $\vec{f}(x, \mu_0)$  não é estruturalmente estável é um valor de bifurcação. São discutidas as bifurcações de sela-nó, transcritical, forquilha e Hopf, cujas explicações podem ser encontradas em Kuznetsov (2004).

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

**Exemplo 1.** *(STROGATZ, 2018)* *A ativação de certos genes é diretamente induzida por 2 cópias da proteína que o compõe, ou seja, esses genes são estimulados por si próprios, potencialmente gerando processo de realimentação autocatalítico. Tal processo genético pode ser modelado pelo sistema (1):*

$$\frac{dx}{dt} = -ax + y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x^2}{1+x^2} - by, \quad (1)$$

onde  $x$  e  $y$  são proporcionais às concentrações de proteína e RNA mensageiro do qual ela é traduzida, respectivamente, e  $a, b > 0$  são parâmetros da taxa de degradação de  $x$  e  $y$ , e com os parâmetros adimensionais. Os pontos de equilíbrio do sistema são determinados em (2), isto é, os pontos de equilíbrio são dados pela intersecção das curvas  $y = ax$  e  $y = \frac{x^2}{b(1+x^2)}$ . Dessa forma, para um  $a$  adequado há no máximo 3 pontos de equilíbrio (Figura 1a).

$$\begin{cases} -ax + y = 0 \\ \frac{x^2}{1+x^2} - by = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax \\ y = \frac{x^2}{b(1+x^2)} \end{cases} \Rightarrow ax = \frac{x^2}{b(1+x^2)} \quad (2)$$

Fixando  $b$  e aumentando  $a$  faz com que as intersecções que não estão na origem se aproximem e colidam como na Figura 1b; continuando a aumentar  $a$  faz com que esses pontos desapareçam deixando o sistema com apenas um ponto de equilíbrio na origem, como ilustrado na Figura 1c.

Para determinar o valor  $a_c$ , onde os pontos se colidem, basta resolver (2) cuja solução trivial é  $x = 0$  referente à origem, e outras duas satisfazem  $ab(1+x^2) = x$  se  $1 - 4a^2b^2 > 0 \Rightarrow 2$ . Portanto as duas soluções se colapsam em  $2ab = 1$ . Logo  $a_c = \frac{1}{2b}$  e  $x_{a_c} = 1$ . A matriz Jacobiana do sistema em  $(x, y)$  é dada por (3):

$$J = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{bmatrix}, \quad (3)$$

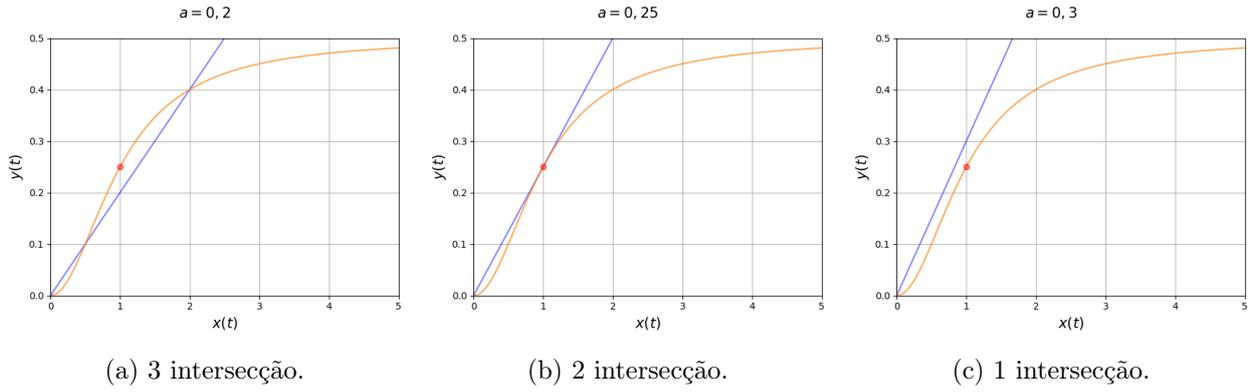


Figura 1: Pontos de equilíbrio de (1) (adotando  $b = 2$ ).

cujos traços são  $\text{tr}(J) = -(a + b) < 0$ ; assim, todos os pontos de equilíbrio são poços ou selas. Como o determinante da matriz em  $(0,0)$  é  $ab > 0$ , então a origem é sempre estável; mais do que isso, é um nó estável, pois  $\text{tr}(J)^2 - 4 \cdot \det(J) = (a - b)^2 > 0$  (exceto quando  $a = b$ ). Quanto aos outros 2 pontos, tem-se o determinante descrito por (4):

$$\det(J) = ab - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = ab \left[ 1 - \frac{2}{1+x^2} \right] = ab \left[ \frac{x^2 - 1}{1+x^2} \right]. \quad (4)$$

Então para  $0 < x < x_{ac}$ ,  $\det(J) < 0$ , indicando um ponto de sela, enquanto para  $x > 1$  tem-se um nó estável, pois,  $\text{tr}(J)^2 - 4 \cdot \det(J) = (a - b)^2 > 0$ . A Figura 2 mostra a solução do sistema com diferentes valores iniciais conforme  $a$  varia e  $b = 2$ , ilustrando a bifurcação de sela-nó em  $a_c = 0,25$ ; uma animação análoga também foi feita, disponível na *GitHub* como todas as outras citadas nesse texto.

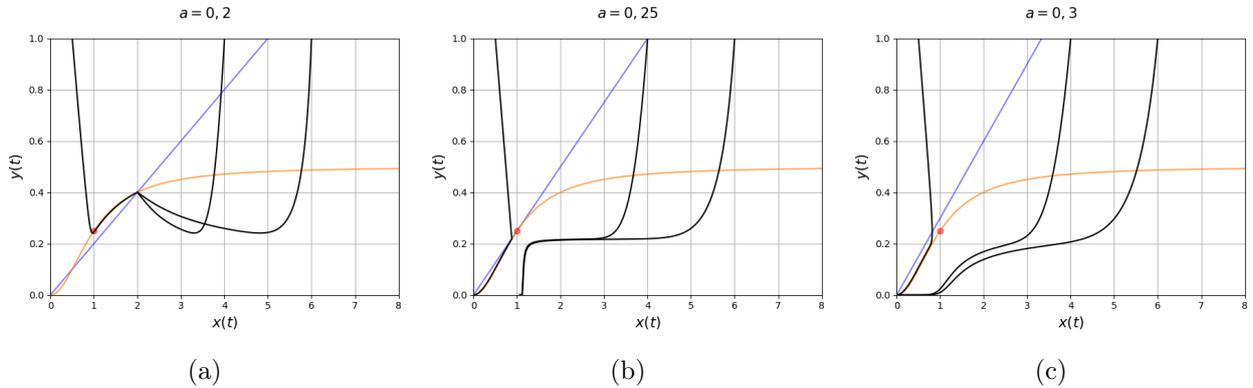


Figura 2: Retrato de fase com as condições iniciais  $(0,5;1)$ ,  $(4;0,2)$  e  $(6;0,8)$ .

A interpretação biológica é que o sistema pode agir como um interruptor bioquímico, mas somente se o mRNA e a proteína se degradarem de forma lenta o suficiente ( $ab < \frac{1}{2}$ ), onde há dois estados estáveis, um na origem, o que significa que o gene é silencioso e não há proteína por perto para ligá-lo; e um onde  $x$  e  $y$  são grandes, o que significa que o gene é ativo e sustentado pelo alto nível de proteína.

**Exemplo 2.** (LYNCH, 2018) O sistema (5) pode ter 1 ou 2 pontos de equilíbrio dependendo de  $\mu$ .

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2, \quad \frac{dy}{dt} = -y \quad (5)$$

No caso onde  $\mu < 0$  tem-se os que 2 pontos são  $(0,0)$  e  $(\mu,0)$ , onde a origem é um nó estável e o outro ponto é uma sela (Figura 3a). Quando  $\mu = 0$ , tem-se apenas um ponto de equilíbrio em  $(0,0)$ , bem

como as curvas de solução satisfazem (6) sendo  $K$  é uma constante qualquer (Figura 3b):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2} \Rightarrow |y| = Ke^{-\frac{1}{x}}. \quad (6)$$

Por fim, para  $\mu > 0$  tem-se dois pontos,  $(0,0)$  e  $(\mu,0)$ , onde a origem agora é um ponto de sela e o outro ponto é um nó estável. A Figura 3c mostra isso através do campo vetorial do sistema.

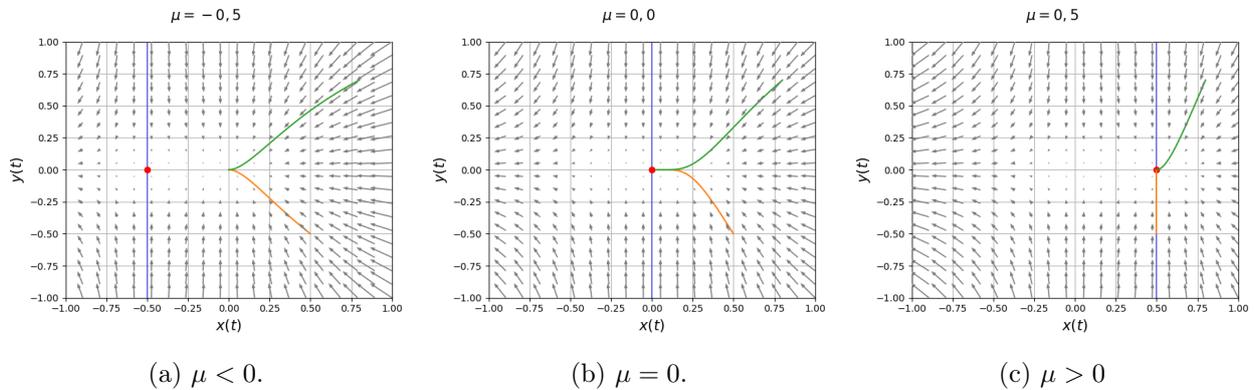


Figura 3: Campo vetorial de (5), e as trajetórias das condições iniciais  $(0,5; -0,5)$  e  $(0,8; 0,7)$ .

**Exemplo 3.** O sistema (7), com o parâmetro  $\mu$ , não se altera com a troca de variáveis  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ; logo espera-se que seu retrato de fase seja simétrico em relação a origem:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + y + \text{sen}(x), \quad \frac{dy}{dt} = x - y. \quad (7)$$

A origem é um ponto de equilíbrio, para qualquer valor de  $\mu$ . Assim, o jacobiano é dado por (8):

$$J = \begin{bmatrix} \mu + 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Então,  $\text{tr}(J) = \mu$ , e portanto  $(0,0)$  é estável se  $\mu < -2$  e um ponto de sela se  $\mu > 2$ , indicando uma bifurcação em  $\mu_c = -2$ . Para confirmar, basta determinar um par de pontos simétricos perto da origem e para um  $\mu$  próximo de  $\mu_c$ ; tais pontos satisfazem  $y = x$  e, logo,  $(\mu + 1)x = \text{sen}(x) = 0$ , sendo que uma solução é 0, como esperado. Quanto às outras soluções, considerando um  $x$  pequeno e positivo pode-se aproximar a função  $\text{sen}(x)$  pelos primeiros termos da sua série de Taylor obtendo (9):

$$(\mu + 1)x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} x^{2n+1} = 0 \approx (\mu + 1)x + x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) = 0. \quad (9)$$

Dividindo a aproximação (9) por  $x$  resulta em  $\mu + 2 - \frac{x^2}{6} \approx 0$ ; portanto existe um par de pontos  $x^* \approx \pm\sqrt{6 + (\mu + 2)}$  para um  $\mu$  um pouco maior do que  $\mu_c$ , mostrando que existe uma bifurcação de Forquilha (Pitchfork) supercrítica em  $\mu_c = -2$ . Caso o par de pontos existisse para um  $\mu$  um pouco menor que  $\mu_c$ , a bifurcação seria subcrítica. Como é supercrítica, conseqüentemente, os pares de pontos são estáveis. Na Figura 4 é mostrada a variação de campo vetorial e de 2 soluções do sistema conforme o valor  $\mu$  se altera, bem como, também estão marcados em vermelho o par de pontos  $x^* \approx \pm\sqrt{6 + (\mu + 2)}$ . As animações referentes a esse gráfico além de mostrarem o comportamento da Figura 4, mostram como a mudança conforme  $\mu$  assume valores distantes do valor de bifurcação (por exemplo  $\mu > -0,8$ ), ilustrando que, de fato, a análise feita só é válida para um  $\mu$  perto da  $\mu_c$ .

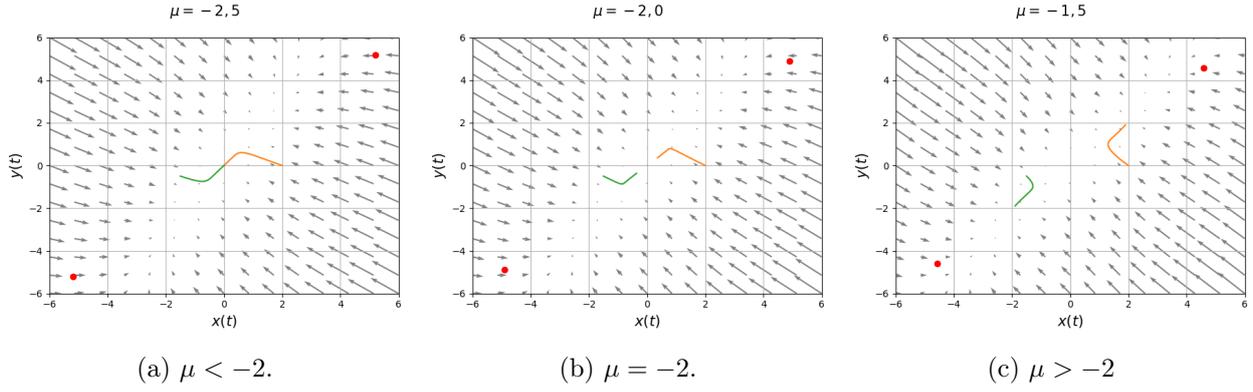


Figura 4: Campo vetorial de (7), e as trajetórias das condições iniciais  $(2, 0; 0, 0)$  e  $(-1, 5; -0, 5)$ .

**Exemplo 4.** No artigo de Yan e Zhang (2008) é apresentado o sistema de EDOs com delay (10), que é baseado no modelo de Lotka-Volterra (ou Presa-predador):

$$\frac{dx}{dt} = x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t - \tau)], \quad \frac{dy}{dt} = y(t)[-r_2 + a_{21}x(t - \tau) - a_{22}y(t - \tau)]. \quad (10)$$

Dentre os resultados obtidos por Yan e Zhang (2008), foi mostrado que, satisfeita a condição  $r_1 a_{21} - r_2 a_{11} > 0$ , existe de um ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  definido por (11):

$$x^* = \frac{r_1 a_{22} + r_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}, \quad y^* = \frac{r_1 a_{21} - r_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}}. \quad (11)$$

Além disso, também foram encontrados resultados sobre a estabilidade e a bifurcação de Hopf sintetizados no Teorema 2, cujo a demonstração está em Yan e Zhang (2008).

**Teorema 2.** Considerando o sistema (10), e o ponto de equilíbrio (11), define-se:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}x^* + a_{22}y^*) > 0, \quad D = (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})x^*y^* > 0$$

$$\tau_j^{(1)} = -\frac{1}{\mu_1} \left( 2j\pi + \frac{\pi}{2} \right), \quad \tau_j^{(2)} = -\frac{1}{\mu_2} \left( 2j\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\tau_j^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{D}} \left[ \cos^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{T^2}{D}} \right) + 2j\pi \right], \quad \tau_j^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{D}} \left[ -\cos^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{T^2}{D}} \right) + (2j + 1)\pi \right]$$

onde  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Com isso, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se  $T^2 - D \geq 0$ , o ponto  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável para  $\tau \in [0, \tau_0^{(2)})$ . Se  $T^2 - D < 0$ , o ponto  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável para  $\tau \in [0, \tau_0^{(3)})$ ;
- (ii) Se  $T^2 - D \geq 0$ , o ponto  $(x^*, y^*)$  é instável quando  $\tau > \tau_0^{(2)}$ . Se  $T^2 - D < 0$ , o ponto  $(x^*, y^*)$  é instável quando  $\tau > \tau_0^{(3)}$ ;
- (iii) Se  $T^2 - D \geq 0$ , então  $\tau \in \{\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}\}$  é um valor de bifurcação de Hopf. Se  $T^2 - D < 0$ , então  $\tau \in \{\tau_j^{(3)}, \tau_j^{(4)}\}$  é um valor de bifurcação de Hopf.

Adotando  $r_1 = r_2 = 1$ ,  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = 1$ ,  $a_{21} = 2$ ,  $a_{22} = 1$ , tem-se por (11) que  $(x^*, y^*) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ . Além disso do Teorema 2, obtém-se que  $\tau_0^{(3)} = 0,8072$ . Portanto,  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável para  $\tau \in [0; 0,8072)$  e instável para  $\tau > 0,8072$ , como mostrado na Figura 5. Além disso, nas

simulações numéricas, na Figura 5c, foi observado o comportamento caótico evidenciado por Yan e Zhang (2008).

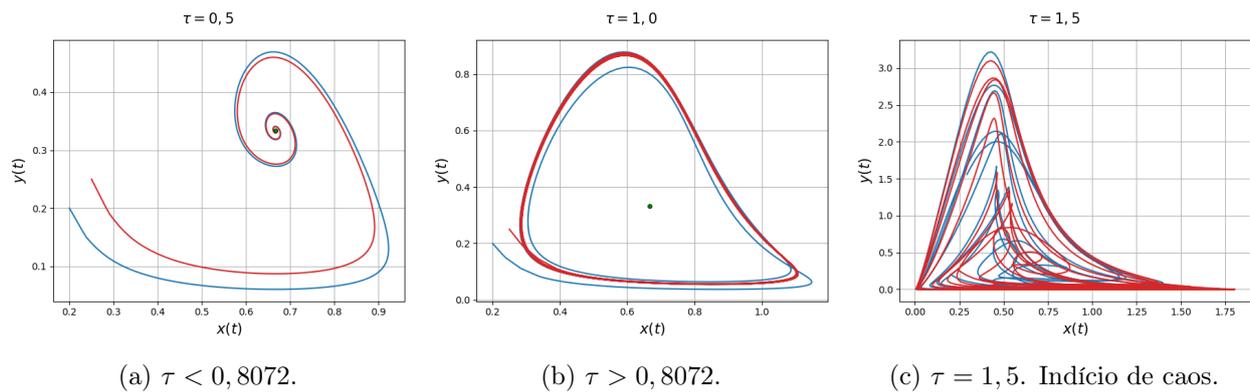


Figura 5: Retrato de fase de (10), com as condições iniciais (0.2, 0.2) e (0.25, 0.25).

## CONCLUSÕES

Através das animações realizadas, foram ilustradas de forma explícita os tipos de mudanças causadas pela variação de um parâmetro para um sistema, bem como, é possível observar que comportamento das mesmas está de acordo com a análise qualitativa feita, com ressalva para o comportamento caótico do exemplo 4 que apenas apresenta evidências. Dessa forma, considera-se que através dessas animações é possível um melhor entendimento inicial sobre o tema.

## CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Ambos contribuíram para a pesquisa. Gustavo Morato de Marchi Soares realizou a redação do texto com revisão de Fabricio Fernando Alves.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao IFSP pelo programa institucional de bolsas de I.C. que viabilizou este trabalho.

## REFERÊNCIAS

- GEORGIU, I.; ROMEO, F. L. Multi-physics dynamics of a mechanical oscillator coupled to an electro-magnetic circuit. *International Journal of Non-linear Mechanics*, v. 70, p. 153–164, 2015.
- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 42.
- KUZNETSOV, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer New York, 2004. ISSN 0066-5452. ISBN 9781475739787. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>>.
- LYNCH, S. *Dynamical Systems with Applications using Python*. Springer International Publishing, 2018. ISBN 9783319781457. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-78145-7>>.
- STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: CRC press, 2018.
- XU, C.; OU, W.; CUI, Q.; PANG, Y.; LIAO, M.; SHEN, J.; BABER, M. Z.; MAHARAJAN, C.; GHOSH, U. Theoretical exploration and controller design of bifurcation in a plankton population dynamical system accompanying delay. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, 2024.
- YAN, X.-P.; ZHANG, C.-H. Hopf bifurcation in a delayed loka–volterra predator–prey system. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 114–127, 2008.