15º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2024

FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS A PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO INTEIRA E SEUS IMPACTOS NA BUSCA DA SOLUÇÃO ÓTIMA

FABRÍCIO F. DOS SANTOS[1], GLAUBER R. COLNAGO[2]

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática no IFSP, Campus Cubatão, ferreira.fabricio1@aluno.ifsp.edu.br.
[2] Professor Doutor EBTT de Matemática no IFSP, Campus Cubatão, glauber.colnago@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 3.08.02.02-4 Programação Linear, Não-Linear, Mista e Dinâmica

RESUMO:

A otimização linear está presente em diversos problemas sociopolíticos existentes atualmente, em especial no âmbito empresarial, sendo esta utilizada como ferramenta para resolução de problemas e auxílio nas tomadas de decisões, cuja finalidade é a maximização ou minimização de funções objetivo. Para um mesmo problema de otimização há a possibilidade de definir diferentes formulações matemáticas. Tendo isso em vista, foi proposto no presente trabalho, formulações alternativas a nove problemas de pequeno porte de otimização inteira-linear. Foram realizados testes utilizando o solver comercial LINGO, sendo que as formulações tradicionais encontradas na literatura e as formulações alternativas propostas foram comparadas. Os resultados mostram que na maioria dos casos houve ganho de tempo no uso da formulação alternativas, chegando-se a um ganho médio próximo a 10%, o que pode ser representado promissor se elevado a escalas maiores.

PALAVRAS-CHAVE: otimização linear-inteira; restrições; formulações matemáticas; inequações.

ALTERNATIVE FORMULATIONS TO INTEGER OPTIMIZATION PROBLEMS AND THEIR IMPACTS ON THE SEARCH OF THE OPTIMUM SOLUTION

ABSTRACT:

Linear optimization is present in various socio-political problems nowadays, especially in business, and is used to help decision-making, with the goal of maximizing or minimizing objective functions. For an optimization problem, it is possible to define different mathematical formulations. This way, the present study proposed alternative formulations for nine small-scale integer-linear optimization problems. Tests were conducted using the commercial solver LINGO, and the traditional formulations, found in the literature, were compared with the alternative formulations proposed in this study. The results show that, in most cases, there was a time improvement with the use of the alternative formulation, resulting in a gain of up to 10%, which could be promising when scaled up to larger problems.

KEYWORDS: integer-linear optimization; constraints; mathematical formulations; inequalities.

INTRODUÇÃO

A otimização linear é utilizada em muitos problemas sociopolíticos existentes atualmente, em especial no âmbito empresarial. Um exemplo são os riscos financeiros eminentes ao se realizar investimentos. Pode-se utilizar uma modelagem matemática para auxiliar o gerenciamento de riscos e, de acordo com Goldbarg e Luna (2000, p.16), a finalidade para se utilizar tais ferramentas é a maximização da utilidade do decisor, na prática, traduzida pela maximização do lucro ou pela minimização do custo e, para que isso se torne realidade, utiliza-se algoritmos para que se encontre a melhor solução.

De acordo com Bressan e Zebediff (2015), os problemas de otimização linear são estruturados através da modelagem matemática, apresentando função objetivo e restrições, definidas através de equações e inequações de 1° grau, delimitando assim uma região onde estão as possíveis soluções, chamada de região factível. Dentro dessa região, busca-se a melhor solução, ou seja, aquela que possui o maior (ou menor, no caso de minimização) valor da função objetivo.

Uma outra classificação dentro de problemas de otimização é a definição de variáveis inteiras, comuns em situações que não aceitam valores decimais, como, por exemplo, a quantidade de carros a serem fabricados (inteiros), a decisão de realizar ou não um investimento (inteiro, mais especificamente, binário). Problemas de otimização inteira também podem ser classificados em lineares, possuindo também equações e inequações, que definem regiões como polígonos (2D), poliedros (3D) ou hiperpoliedros (4D ou mais). Estas regiões podem ser limitadas, possuindo uma quantidade finita de possibilidades de soluções inteiras, ou ilimitadas, implicando em infinitas combinações possíveis de solução.

Um mesmo problema de otimização pode ser formulado de diversas formas, sendo que cada formulação pode ter implicações no algoritmo de solução, facilitando ou dificultando a busca pela solução ótima, seja por conta do tamanho da região factível, ou pela quantidade de restrições envolvidas na formulação. Assim, com o objetivo de verificar o desempenho de diferentes formulações para um problema, neste trabalho foi utilizada uma metodologia para gerar formulações alternativas a problemas de otimização linear-inteira. Foram feitos testes quantitativos buscando resolver instâncias de pequeno porte, visando comparar o desempenho de um solver comercial ao resolver problemas com formulações tradicionais encontradas na literatura e novas formulações criadas no processo mencionado.

MATERIAL E MÉTODOS

Os objetos de estudo foram problemas clássicos de otimização inteira encontrados em páginas da internet. Foram utilizados nove problemas nas simulações. A título de exemplo, o enunciado de um deles está apresentado na sequência:

Problema 8

Um alfaiate tem disponíveis os seguintes tecidos: 16 metros de algodão, 11 metros de seda e 15 metros de lã. Para um terno são necessários 2 metros de algodão, 1 metro de seda e 1 metro de lã. Para um vestido, são necessários 1 metro de algodão, 2 metros de seda e 3 metros de lã. Se um terno é vendido por R$300,00 e um vestido por R$500,00, quantas peças de cada tipo o alfaiate deve fazer, de modo a maximizar o seu lucro?

Através do enunciado, pode-se criar a formulação (1)-(5), chamada aqui de tradicional, em que os dados informados são diretamente utilizados na função objetivo e nas restrições.

$$Max\ 300x\ +\ 500y \qquad (1)$$

s.a $$2x\ +\ y \leq 16 \qquad (2)$$

$$x\ +\ 2y \leq 11 \qquad (3)$$

$$x\ +\ 3y \leq 15 \qquad (4)$$

$$x, y \in N \qquad (5)$$

As restrições (2)-(4) definem a região apresentada na Figura 2a, que se trata da intersecção de todos os semiplanos, definindo a área mais escura, limitada pelos vértices (0,5), (3,4), (7,2) e (8,0), e considerando a restrição de que os valores devem ser não negativos, inclui-se também o vértice (0,0), definindo-se um polígono. Além disso, considerando que as variáveis podem assumir apenas valores naturais (5), o conjunto de soluções torna-se limitado a 36 possibilidades, conforme pode ser visualizado nos pontos (•) da Figura 1. A saber, a solução ótima é a combinação (7,2), com valor ótimo de *R$*3.100. Na mesma figura, pode-se verificar um conjunto de pontos infactíveis (**x**). Obviamente, há infinitos pontos infactíveis, sendo possível visualizar apenas os que estão no retângulo [0,8]×[0,5].

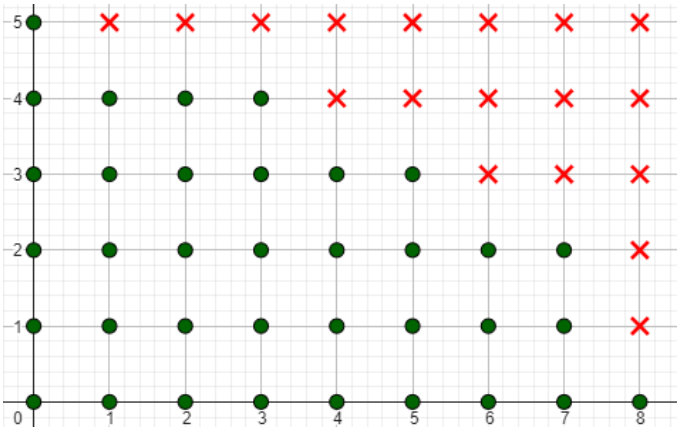


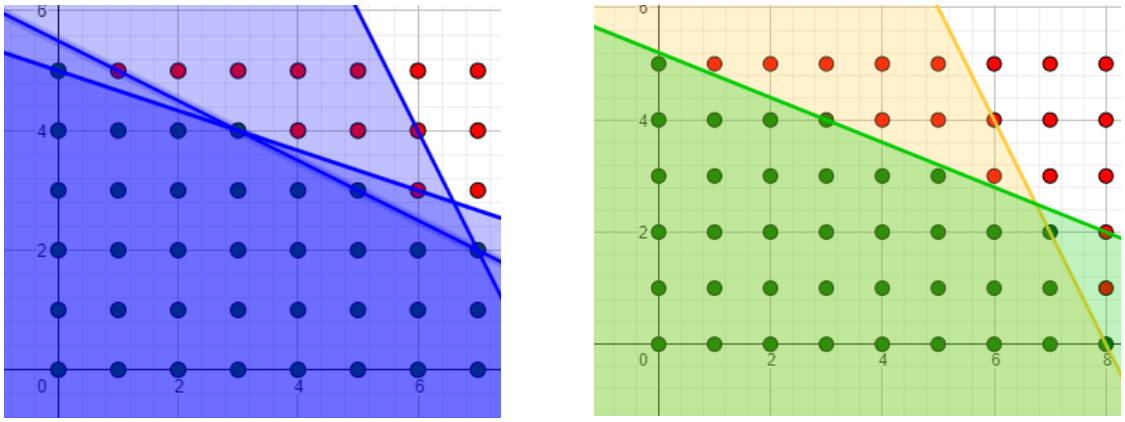
Figura 1 - Soluções factíveis (•) e algumas infactíveis (x) para o Problema 8

No entanto, como a formulação apresentada não é a única possível para o problema, para criar uma alternativa, utilizou-se o processo cuja ideia inicial foi utilizada para um problema de grade de horários (Moreira, Junior e Colnago, 2019), formalizada para aplicação no problema do Sudoku (Pereira, Colombo-Junior e Colnago, 2021) e ampliada para um problema do torneio com viagens (Cardoso e Colnago, 2023). O processo consiste em fazer a listagem dos pontos factíveis e infactíveis (mais especificamente, um conjunto limitado de soluções infactíveis). No caso do Problema 8, os pontos apresentados na Figura 1 são suficientes para a realização do processo, gerando assim as novas restrições (6) e (7), que substituem as restrições (2)-(4). O algoritmo para gerar restrições visa encontrar a menor quantidade de restrições possível e pode-se verificar que três restrições foram substituídas por duas.

$$2x\ +\ y \leq 16 \qquad (6)$$

$$2x\ +\ 5y \leq 26 \qquad (7)$$

Na Figura 2b, pode-se observar a região factível obtida pelas restrições (6)-(7). Verifica-se que as soluções factíveis inteiras são as mesmas nas duas regiões, mas é importante mencionar que o conjunto de soluções reais são diferentes, sendo que esta abordagem pode apenas ser aplicada a problemas inteiros. No caso do Problema 8, encontrou-se polígonos, ou seja, regiões limitadas, sendo que a formulação tradicional definiu o fecho convexo das soluções factíveis, ou seja, o menor polígono que contém os pontos. Por outro lado, a formulação alternativa definiu uma região maior que a do fecho convexo.



(a) (b)

Figura 2 - Regiões definidas pelas restrições tradicionais (a) e pelas restrições alternativas (b) para o Problema 8

Há problemas que definem regiões não limitadas, como é o caso do Problema 9, cujo enunciado está apresentado na sequência:

Problema 9

Uma pessoa precisa de 10, 12 e 13 unidades dos produtos A, B e C, respectivamente, para o seu jardim. Um produto contém 5, 2 e 1 unidade de A, B e C, respectivamente, por vidro; um produto em pó contém 1,2 e 4 unidades de A,B e C respectivamente por caixa. Se o produto líquido custar R$3,00 por vidro e o produto em pó custa $2,00 por caixa, quantos vidros e quantas caixas ele deve comprar para minimizar o custo e satisfazer as necessidades?

A formulação tradicional é a (8)-(12) e a região factível é a apresentada na Figura 3a. Pode-se verificar na figura que a região factível é ilimitada, mas, por conta da função objetivo, a solução encontra-se próxima à origem do plano cartesiano pois, caso contrário, o problema seria ilimitado, com valor ótimo tendendo ao infinito. A saber, a solução ótima é (1,5) com valor ótimo de $13.

$$Min\ 3x\ +\ 2y \tag{8}$$

s.a

$$5x\ +\ y \geq 10 \tag{9}$$

$$2x\ +\ 2y \geq 12 \tag{10}$$

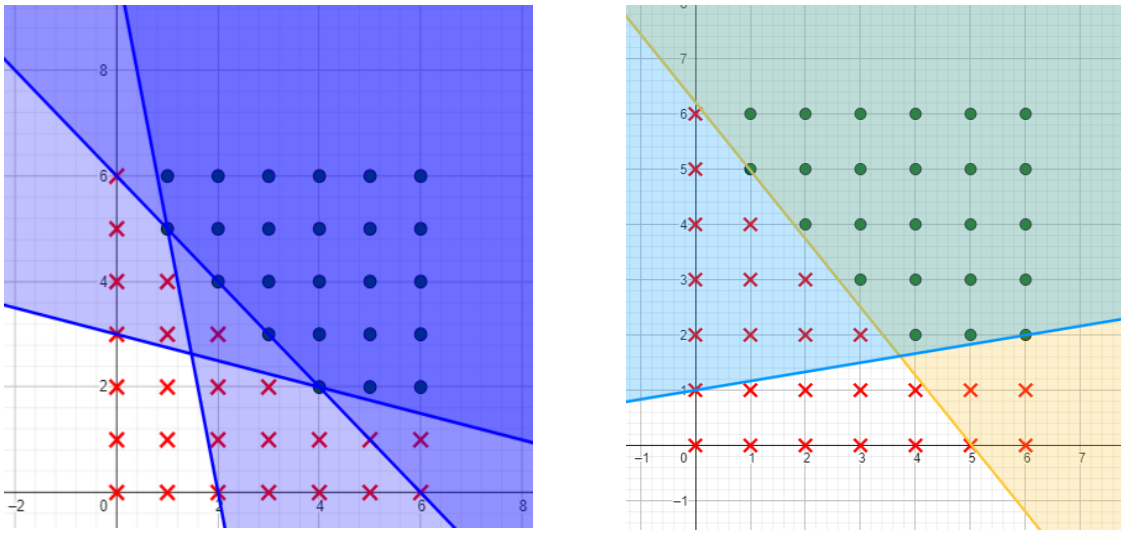
$$x\ +\ 4y \geq 13 \tag{11}$$

$$x, y \in N \tag{12}$$

Sabendo-se então que as soluções mais importantes (por serem candidatas a ótimos) são as mais próximas ao ponto (0,0), listou-se apenas o conjunto de soluções factíveis no quadrado [0,6]×[0,6]. Após o uso do processo de geração de restrições alternativas, chegou-se às restrições (13)-(14), que substituem (9)-(11).

$$199x\ +\ 161y \geq 1000 \tag{13}$$

$$-\ 166x\ +\ 1000y \geq 1000 \tag{14}$$



(a) (b)

Figura 3 - Regiões definidas pelas restrições tradicionais (a) e pelas restrições alternativas (b) para o Problema 9

Os mesmos procedimentos de criação de restrições alternativas foram realizados para os demais problemas, de 1 a 7, além dos problemas 8 e 9 mencionados. Assim, foram obtidas 18 formulações, entre tradicionais e alternativas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir de duas formulações para cada um dos nove problemas, foram realizados 30 testes para cada, totalizando $30 \times 9 \times 2 = 540$ testes, realizados de forma intercalada, ou seja, uma simulação do Problema 1 usando a formulação tradicional, uma do Problema 1 com a formulação alternativa, depois repetindo a sequência até as 30 rodadas para um único problema, com o objetivo de diminuir interferências de condições momentâneas de processamento do computador. Ao final foi calculada a média de tempo e o ganho de tempo em porcentagem, como mostra a Tabela 1. Nas colunas estão os resultados dos nove problemas e nas linhas, as médias de tempo ao resolver o problema com sua formulação tradicional e alternativa. A última linha apresenta a diferença percentual entre a formulação tradicional com a alternativa. Como se tratam de problemas de pequeno porte, os tempos médios são todos menores que 1 segundo. Pode-se verificar que, dos nove problemas, seis apresentaram ganho ao utilizar a formulação alternativa, dois obtiveram os mesmos tempos médios e apenas um apresentou piora no tempo. Os ganhos absolutos de tempo estiveram na ordem de 10^{-3} segundos, mas percentualmente chegou próximo a 10%, o que, em uma grande escala pode representar horas de diminuição de tempo.

Problema → Formulação ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tradicional (segundos)	0,9100	0,0667	0,07567	0,06833	0,0753	0,0700	0,0740	0,0847	0,0883
Tradicional (segundos)	0,9100	0,0647	0,07167	0,06467	0,0753	0,0717	0,0720	0,0800	0,0797
(Tradicional – Alternativa)/Tradicional	0%	3%	5,26%	5,37%	0%	-2,38%	2,70%	5,51%	9,81%

Tabela 1 - Resultados obtidos através das simulações feitas no LINGO

CONCLUSÕES

Possivelmente, um dos fatores que potencializou o ganho de tempo na maioria dos problemas utilizando a formulação alternativa, foi o fato de as restrições alternativas propostas possuírem menos restrições. Isto faz com que o solver tenha que lidar com menos dados, tornando o problema mais compacto. Apesar dos ganhos em termos absolutos serem pequenos, na ordem de 10^{-3} segundos, chegou-se próximo ao ganho de 10%, o que, em grande escala, é significativo. Para isto, faz-se necessário realizar testes com problemas maiores. É importante destacar que o processo para gerar restrições pode não ser viável para situações em que se tenha que listar uma quantidade grande (proibitiva) de possibilidades, mas há formas de lidar com isto, que seria utilizar uma listagem de algumas variáveis do problema, e não necessariamente todas.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Fabricio Ferreira dos Santos realizou os experimentos e tabulou os dados. Glauber Renato Colnago orientou a pesquisa. Ambos, Glauber Renato Colnago e Fabricio Ferreira dos Santos, contribuíram com a escrita do trabalho.

REFERÊNCIAS

BRESSAN, Glaucia e ZEBEDIFF, Nayara. Modelagem Matemática e Resolução de Problemas de Gerenciamento da Produção Utilizando Programação Linear. São Paulo, UNESP, 2015.

CARDOSO, G. C. e COLNAGO, G. R. Modelagem alternativa ao problema do torneio com viagens. Anais do 14º CONICT, IFSP, 2023.

GOLDBARG, César e LUNA, Henrique Pacca L. Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos. São Paulo: Campus, 2000.

MOREIRA, J. P. S., COLOMBO-JUNIOR, J. R. e COLNAGO, G. R. Comparação de restrições de consecutividade de aulas na geração de grades horárias usando programação inteira. Anais do 1º CONICT, IFSP, 2019.

PEREIRA, A.R., COLOMBO-JUNIOR, J. R. e COLNAGO, G. R. Metodologia para a criação de restrições para problemas de otimização inteira: uma aplicação ao sudoku. Anais do 12º CONICT, IFSP, 2021.