Estabilidade geodésica de órbitas circulares ao redor de buracos negros regulares com cabelo

RONALDO CESAR DE PAIVA[1], ROGERIO TEIXEIRA CAVALCANTI[2]

[1]Mestre em Física, Bolsista CAPES, UNESP, Câmpus Guaratinguetá, ronaldo.paiva@unesp.br.
[2]Doutor em Física, UERJ, Departamento de Matemática Aplicada, rogerio.txc@protonmail.com.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.05.01.03-7 Relatividade e Gravitação.

RESUMO: Neste trabalho foi analisada a estabilidade de geodésicas circulares em torno de uma solução que descreve um buraco negro regular e com "cabelo". Os expoentes de Lyapunov foram utilizados para quantificar o grau de instabilidade de uma trajetória geodésica $x(t)$. A partir desses expoentes, foram determinados os raios de órbitas características em buracos negros, como a órbita circular estável mais interna (ISCO) e a esfera de fótons. Além disso, foi estabelecida uma relação entre o parâmetro de "cabelo"β e as órbitas resultantes, concluindo que os raios da ISCO e da esfera de fótons são inversamente proporcionais ao parâmetro β.

PALAVRAS-CHAVE: gravitação; buracos negros; relatividade geral; expoentes de Lyapunov; sistemas dinâmicos.

Geodesic stability of circular orbits around regular hairy black holes

ABSTRACT: In this work, the stability of circular geodesics around a solution describing a regular black hole with "hair"was analyzed. Lyapunov exponents were used to quantify the degree of instability of a geodesic trajectory $x(t)$. Using these exponents, the radii of characteristic orbits in black holes, such as the innermost stable circular orbit (ISCO) and the photon sphere, were determined. Additionally, a relationship between the "hair"parameter β and the resulting orbits was established, concluding that the radii of the ISCO and the photon sphere are inversely proportional to the parameter β.

KEYWORDS: gravitation, black holes, general relativity, Lyapunov exponents, dynamical systems.

INTRODUÇÃO

O estudo do movimento geodésico de partículas de teste ao redor de buracos negros possui importantes implicações no entendimento da física de corpos compactos, fornecendo informações sobre propriedades destes corpos e da geometria do espaço-tempo (TOUATI; SLIMANE, 2024; CARDOSO et al., 2009). Buracos negros com “cabelo”, como o caso estudado nesse trabalho, evadem o teorema *no-hair* (NUNEZ; QUEVEDO; SUDARSKY, 1998; HERDEIRO; RADU, 2015), que afirma que buracos negros podem ser integralmente descritos por apenas três parâmetros: massa, carga e momento angular (OVALLE et al., 2021). Soluções com cabelo podem ser utilizadas para testar a relatividade geral, especialmente em regimes onde se espera que os efeitos gravitacionais sejam extremos, como nas vizinhanças de buracos negros (ISI et al., 2019; CARDOSO; GUALTIERI, 2016). Além disso, a existência de um parâmetro que viole o teorema da calvície pode nos dar informações sobre campos alternativos ou extensões da relatividade geral. Neste trabalho obtivemos assinaturas características do buraco negro estudado, diferenciando-o da clássica solução de Schwarzschild. Apresentamos uma breve discussão sobre buracos negros regulares com cabelo e introduzimos os expoentes de Lyapunov, a ferramenta utilizada para o estudo da estabilidade geodésica utilizado. Em seguida, apresentamos os resultados obtidos aplicando tal método. Por fim, analisamos possíveis perspectivas em relação aos resultados apresentados.

METODOLOGIA

Buracos negros regulares com cabelo

A base da teoria da relatividade geral são as equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \tag{1}$$

onde $G_{\mu\nu}$ é conhecido como tensor de Einstein e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento que carrega informações sobre a distribuição e o fluxo de energia e momento em um sistema físico. Resolver as equações de Einstein significa obter a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo modificado pela distribuição de massa e energia representada por $T_{\mu\nu}$. Um dos tipos mais famoso de soluções das equações de campo é o que descreve buracos negros. Classicamente, buracos negros em equilíbrio, ou seja, isolados e sem o efeito de nenhuma perturbação, são descritos integralmente por três parâmetros: massa, carga e momento. Não sendo necessário nenhum parâmetro extra além destes para descrevê-los. Tal afirmação é sustentada pelo que conhecemos por teorema *no-hair*. Em teorias alternativas ou extensões da relatividade geral, parâmetros extras surgem contrariando o teorema *no-hair* (OVALLE et al., 2021). Devido a isso, um parâmetro diferente dos parâmetros clássicos é chamado de “hair” ou “cabelo”.

Além disso, os buracos negros clássicos da relatividade geral possuem uma região chamada singularidade. A singularidade é a região onde curvatura do espaço-tempo se torna infinita e as leis da física, como conhecemos, deixam de ser aplicáveis. Entretanto, existem soluções tipo buraco negro das equações de campo que descrevem buracos negros em que tal região não é presente. Essas soluções descrevem buracos negros conhecidos como buracos negros regulares. Nesse trabalho, estudamos um buraco negro regular com cabelo descrito pelo elemento de linha (OVALLE; CASADIO; GIUSTI, 2023)

$$ds^2 = -f(r,\beta)dt^2 + f(r,\beta)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2}$$

onde

$$f(r,\beta) = 1 - \frac{2}{r} + e^{-\frac{r}{\beta}}\frac{r^2 + 2\,r\beta + 2\,\beta^2}{r\beta^2}. \tag{3}$$

Se $\beta \to 0$, o elemento de linha na equação (2) se resume ao elemento de linha da solução de Schwarzschild que descreve um buraco negro estático esfericamente simétrico sem carga. Ao passo que se $\beta \to \infty$, o elemento de linha se resume a descrever o espaço-tempo de Minkowski.

Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são aplicados no estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos. Na teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos, os expoentes de Lyapunov fornecem uma medida do grau de instabilidade de uma trajetória $x(t)$, isto é, eles fornecem uma medida da razão média da divergência das trajetória que iniciam infinitamente próximas de um ponto em comum (TOUATI; SLIMANE, 2024). Considere uma trajetória $x(t)$ dada pela solução do sistema dinâmico

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x) \tag{4}$$

e uma pequena perturbação $\xi(t)$ em $x(t)$ dada por $\xi(t) = x(t) - x_0$. O ponto x_0 é o ponto inicial de $x(t)$. A razão exponencial da divergência de $\xi(t)$, o que chamamos de expoente de Lyapunov principal, é dado por (TOUATI; SLIMANE, 2024):

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \frac{||\xi(t)||}{||\xi(0)||} \tag{5}$$

onde $||\ldots||$ denota a normal vetorial em relação a métrica considerada. Para um particula de teste sem rotação em um campo gravitacional de qualquer espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, o expoente de Lyapunov no tempo próprio, ou seja, o expoente de Lyapunov calculado em relação ao tempo medido pelo referencial da partícula é (TOUATI; SLIMANE, 2024; CARDOSO et al., 2009):

$$\lambda_\tau = \pm\sqrt{\frac{(\dot{r}^2)'}{2}}. \tag{6}$$

Enquanto o expoente de Lyapunov no tempo coordenado, que é o tempo usado em um sistema de coordenadas fixo, é dado por

$$\lambda_0 = \pm\sqrt{\frac{(\dot{r}^2)'}{2\dot{t}^2}}, \tag{7}$$

onde $(')$ and $(.)$ representam a derivada em relação à coordenada radial e ao parâmetro afim, respectivamente.

Estabilidade geodésica ao redor do buraco negro regular com cabelo

Nessa seção, obtivemos os expoentes de Lyapunov para geodésicas circulares do tipo-luz e do tipo-tempo ao redor do buraco negro estudado. Inicialmente, determinamos as equações que descrevem as geodésicas circulares em torno do buraco negro descrito pelo elemento de linha dado na equação (2). Obtidas as equações necessárias, basta realizar as adaptações para o tipo de geodésica considerada. Partindo da lagrangiana de uma partícula de teste movendo-se no espaço-tempo do buraco negro regular com cabelo

$$2\,\mathcal{L} = -f(r,\beta)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r,\beta)} + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{8}$$

e estabelecendo que o movimento da partícula teste está confinado no plano equatorial, é possível escrever os momentos canônicos como

$$p_t = -f(r,\beta)\dot{t} = -E \Rightarrow \dot{t} = \frac{E}{f(r,\beta)}, \tag{9}$$

$$p_r = \frac{\dot{r}}{f(r,\beta)}, \tag{10}$$

$$p_\varphi = r^2\dot{\varphi} = L \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}, \tag{11}$$

onde E é a energia da partícula de teste e L é o momento angular da partícula de teste. Para cada tipo de geodésica verifica-se

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \varepsilon, \tag{12}$$

onde $\varepsilon = -1$ ou 0 para geodésicas do tipo-tempo e tipo-luz, respectivamente. Para o buraco negro estudado,

$$-\frac{E^2}{f(r,\beta)} + \frac{\dot{r}^2}{f(r,\beta)} + \frac{L^2}{r^2} = \varepsilon. \tag{13}$$

Por fim, é possível escrever a equação geodésica radial

$$\dot{r}^2 = E^2 + \left(\varepsilon - \frac{L^2}{r^2}\right) f(r,\beta). \tag{14}$$

RESULTADOS

Geodésicas do tipo-tempo

Para estudar geodésicas do tipo-tempo, basta estabelecer $\varepsilon = -1$ na equação (14), obtendo

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) f(r,\beta). \tag{15}$$

Em geodésicas circulares, $\dot{r}^2 = (\dot{r}^2)' = 0$. Impondo-se essa condição, é possível determinar as constantes de movimento em função dos parâmetros do buraco negro para geodésicas circulares do tipo-tempo

$$E^2 = \frac{2\left(r_0\beta^2 e^{\frac{r_0}{\beta}} - 2\,\beta^2 e^{\frac{r_0}{\beta}} + r_0^2 + 2\,r_0\beta + 2\,\beta^2\right)^2 e^{\left(-\frac{r_0}{\beta}\right)}}{\left(2\,r_0\beta^3 e^{\frac{r_0}{\beta}} - 6\,\beta^3 e^{\frac{r_0}{\beta}} + r_0^3 + 3\,r_0^2\beta + 6\,r_0\beta^2 + 6\,\beta^3\right) r_0\beta}, \tag{16}$$

$$L^2 = r_0^2 \frac{2\,\beta^3\left(e^{\frac{r_0}{\beta}} - 1\right) - r_0\left(r_0^2 + r_0\beta + 2\,\beta^2\right)}{2\beta^3\left(r_0 e^{\frac{r_0}{\beta}} - 3\,e^{\frac{r_0}{\beta}} + 3\right) + r_0\left(r_0^2 + 3\,r_0\beta + 6\,\beta^2\right)}, \tag{17}$$

onde r_0 é raio da geodésica circular. Determinados os valores de E^2 e L^2, podemos substituí-los na equação (18). Com isso, utilizando as equações (6) e (7) é possível determinar os expoentes de Lyapunov. As geodésicas circulares são estáveis para valores complexos do expoente de Lyapunov, enquanto para valores reais do expoente de Lyapunov, as geodésicas são instáveis. É possível determinar o raio da órbita circular estável mais interna (ISCO) do buraco negro regular com cabelo. Os valores do raio da ISCO são apresentados na tabela abaixo para diferentes valores de β.

Tabela 1: Raio crítico para geodésicas circulares do tipo-tempo ao redor do buraco negro. Se $r_0 < r_{\text{crit}}$, a órbita é instável. A órbita de um corpo que orbite o buraco negro a uma distância menor do que r_{crit} espiraliza em direção ao buraco negro. Para $\beta = 0.00$, temos o raio da ISCO para a solução de Schwarzschild.

β	0.00	0.10	0.20	0.30
r_{crit}	6.00000	5.99999	5.99999	5.99937

Fonte: Elaborado pelo autor.

Geodésica tipo-luz

Para estudar geodésicas do tipo-luz, basta estabelecer $\varepsilon = 0$ na equação (14), obtendo

$$\dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2} f(r, \beta). \tag{18}$$

Analogamente ao caso de geodésicas do tipo-tempo, os parâmetros relevantes ao problema foram determinados. Estabelecendo $\dot{r}^2 = 0$, é possível determinar o raio da esfera de fótons do buraco negro estudado. Os valores do raio da esfera de fótons estão presentes na tabela abaixo para diferentes valores de β. Para diferenciar os casos, o raio da geodésica circular do tipo-luz é denotado por r_c.

Tabela 2: Raio da esfera de fótons do buraco negro regular com cabelo. $\beta = 0.00$ remete à solução de Schwarzschild.

β	0.00	0.10	0.20	0.30
r_c	3.00000	2.99999	2.99936	2.96634

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como para a ISCO, o raio da esfera de fótons é inversamente proporcional à β. De maneira análoga ao caso de geodésicas do tipo-tempo, podemos determinar os expoentes de Lyapunov. No caso de geodésicas do tipo-luz, definiu-se um intervalo em que os expoentes de Lyapunov são reais, implicando em instabilidade das geodésicas de raio contido nesse intervalo.

Tabela 3: Intervalo de instabilidade para geodésicas do tipo-luz. Os valores que variam entre $r_c^{\max}$ e $r_c^{\min}$ correspondem a uma órbita instável. $\beta = 0.00$ remete à solução de Schwarzschild.

β	0.00	0.10	0.20	0.30
$r_c^{\max}$	4.0000	3.99999	3.99993	3.98789
$r_c^{\min}$	2.00000	1.99999	1.99433	1.90355

Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível observar que o raio da esfera de fótons para os diferentes β está contido dentro do intervalo. Conforme esperado, pois a esfera de fótons trata-se de uma órbita instável.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Neste trabalho estabelecemos uma relação entre o parâmetro de "cabelo" β de um buraco negro regular e as órbitas especiais desta solução. Observamos que os raios da ISCO e da esfera de fótons são inversamente proporcionais a β, caracterizando uma clara assinatura da solução com cabelo que a diferencia da solução de Schwarzschild. Além disso, como perspectivas futuras, os expoentes de Lyapunov podem ser utilizados para determinar também as frequências quasinormais desse tipo de buraco negro. Assim como as órbitas podem fornecer assinaturas observacionais da solução, os modos quasinormais também podem servir a esse propósito. Com o avanço de detectores como LISA e LIGO, além das imagens obtidas pela colaboração *Event Horizon Telescope*, o estudo de características observacionais de buracos negros tornan-se cada vez mais relevante para testar a relatividade geral e outras teorias alternativas da gravitação.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

R.T.C. contribuiu com a concepção e escopo do trabalho. R.C.P. procedeu com a metodologia e escrita do trabalho.

Todos os autores contribuíram com a revisão do trabalho e aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

CAPES - Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

REFERÊNCIAS

CARDOSO, V.; GUALTIERI, L. Testing the Black Hole 'No-hair' Hypothesis. *Class. Quant. Grav.*, v. 33, n. 17, p. 174001, 2016.

CARDOSO, V. et al. Geodesic Stability, Lyapunov Exponents and Quasinormal Modes. *Phys. Rev. D*, v. 79, n. 6, p. 064016, 2009.

HERDEIRO, C. A. R.; RADU, E. Asymptotically flat black holes with scalar hair: a review. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 24, n. 09, p. 1542014, 2015.

ISI, M. et al. Testing the No-hair Theorem with GW150914. *Phys. Rev. Lett.*, v. 123, n. 11, p. 111102, 2019.

NUNEZ, D.; QUEVEDO, H.; SUDARSKY, D. Black hole hair: A review. *Lect. Notes Phys.*, v. 514, p. 187–198, 1998.

OVALLE, J. et al. Hairy Black Holes by Gravitational Decoupling. *Phys. Dark Univ.*, v. 31, p. 100744, 2021.

OVALLE, J.; CASADIO, R.; GIUSTI, A. Regular Hairy Black Holes Through Minkowski Deformation. *Phys. Lett. B*, v. 844, p. 138085, 2023.

TOUATI, A.; SLIMANE, Z. Lyapunov Exponents and Geodesic Stability of Schwarzschild Black Hole in the Non-commutative Gauge Theory of Gravity. 5 2024.