15º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2024

RESOLUÇÃO DO MODELO DE CORRIDA ARMAMENTISTA DE RICHARDSON UTILIZANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

ANA LÍVIA GANDOLPHI BRASSIOLI[1], MÁIRA PERES ALVES SANTIM[2]

[1] Discente no curso Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de São Paulo (IFSP), campus Birigui.
[2] Mestre na Área de Automação, em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"(Unesp). Atualmente é professora do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), campus Birigui.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.02.04-3 Equações Diferenciais Ordinárias.

RESUMO: O projeto mostrado nesse artigo faz parte de um trabalho de conclusão de curso, em que foi feito um estudo sistemático sobre transformada de Laplace e a sua aplicação em equações diferenciais ordinárias. É resolvido, usando a transformada de Laplace, uma modelagem matemática sobre uma corrida armamentista entra duas nações, que consiste em um sistema de equações diferenciais ordinárias. No trabalho é mostrado como a Transformada de Laplace pode ajudar na resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias, afinal facilita a resolução ao transformar o sistemas de equações diferenciais ordinárias em um sistema linear simples.

PALAVRAS-CHAVE: equações diferenciais ordinárias; sistema de equações diferenciais ordinárias.

RESOLUTION OF RICHARDSON'S ARMS RACE MODEL USING LAPLACE TRANSFORM

ABSTRACT: The project shown in this article is part of a course conclusion work, in which a systematic study was carried out on the Laplace transform and its application in ordinary differential equations. Using the Laplace transform, a mathematical modeling of an arms race between two nations is solved, which consists of a system of ordinary differential equations. It shows how the Laplace Transform can help in solving systems of ordinary differential equations, after all it facilitates the resolution by transforming the system of ordinary differential equations into a simple linear system.

KEYWORDS: ordinary differential equations; system of ordinary differential equations.

INTRODUÇÃO

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equações em que as incógnitas são derivadas de uma função, ao resolver as equações a solução será a função. A Transformada de Laplace é uma tranformada integral que tem o objetivo de mudar o domínio de uma função, tal transformada é usada também para resolver alguns tipos de EDOs.

Neste trabalho é estudado uma modelagem matemática desenvolvida pelo matemático Lewis F. Richardson (1881 - 1953), que desenvolveu diversos modelos que analisam a dinâmica de corridas armamentistas. O modelo de Richardson é muito importante no estudo das relações internacionais, já sendo utilizado para o desenvolvimento de outros modelos armamentista, como também foi utilzado para descobrir as despesas de algumas nações durante guerras. Martins (2021) mostra em seu trabalho que o modelo de Richardson foi utilizado para calcular as as despesas militares da França e da Rússia e da Alemanha e da Áustria em o período entre 1909 e 1914, e os gastos militares da Organização do Tratado do Atlântico Norte e o Pacto de Varsóvia durante a Guerra Fria

No modelo usado aqui, Richardson utiliza um sistema de EDOs de primeira ordem para modelar uma corrida armamentista entre duas nações, em que mostra os investimentos econômicos em armamento dessas duas nações, que se baseia no medo mútuo, os "freios internos"que as nações podem ter e os fatores econômicos positivos ou não. Neste trabalho, tal modelo será resolvido utilizando a Transformada de Laplace.

MATERIAIS E MÉTODOS

O estudo apresentado foi desenvolvido no Trabalho de Conclusão de Curso da autora, que discute a utilização da Transformada de Laplace na resolução de EDOs, como também algumas aplicações. O trabalho foi desenvolvido a partir de um estudo sistemático sobre equações diferenciais ordinárias, como também sobre cálculo. Os estudos começaram com a base de Transformada de Laplace, seguindo para a utilização dela em EDOs, sendo aprofundando nas aplicações.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Transformada de Laplace é uma transformada integral, ferramenta muito utilizada para resolver equações diferenciais. Ela apresenta diversas aplicações, como na engenheria, para transformar funções do domínio do tempo para o domínio da frequência. Essa Transformada é definida da seguinta maneira.

Definição 1. Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$ que satisfaz certas condições. Sua Transformada de Laplace, que é denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou $F(s)$, será da forma:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \ = \ F(s) \ = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \ dt$$

sempre que a integral convergir. O parâmetro s pode ser complexo, da forma $s = a + bi$, porém, para os problemas discutidos neste trabalho, será considerado apenas valores reais para s.

Perceber-se que ao aplicar a Transformada de Laplace em uma função resultará em uma integral imprópria. Portanto, calculando-a, depois de aplicar a Transformada de Laplace, teremos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \ = \ F(s) \ = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \ dt \ = \ \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-st} f(t) \ dt$$

Podemos definir também a Tranformada inversa de Laplace.

Definição 2. Definindo a função $F(s)$ como a Transformda de Laplace da função $f(t)$, sendo assim $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Chamamos $f(t)$ de *Transformada Inversa de Laplace* da função $F(s)$ e escrevemos como $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

Percebe-se que a Transformada de Laplace muda o domínio de uma função, da variável t para a variável s. A Tranformada Inversa também mudará a domínio da função, porém ela mudará da variável s para a variável t, fazendo assim, literalmente, o inverso da Transformada de Laplace.

As Tranformadas de Laplace das principais funções são tabeladas, não sendo necessário, então, resolver o limite da integral para encontrar a Transformada. Abaixo há algumas funções com suas respectivas Transformadas.

Tabela 1: Transformadas de Laplce Elementares

	$f(t)$	$F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3.	$sen\ at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
4.	$\cos\ at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

O teorema a seguir mostrará como é possível utilizar a Tranformada de Laplace na resolução de problemas de valores iniciais (PVI) de EDOs.

Teorema 1. *Suponha que as funções* $f, f', ..., f^{(n-1)}$ *são contínuas e que* $f^{(n)}$ *é seccionalmente contínua em qualquer intervalo* $0 \leq t \leq A$*, sendo* $f^{(n)}$ *a derivada enésima da função* $f(s)$*. Suponha também, além disso, que existe constantes* K, a *e* M *tais que* $|f(t)| \leq Ke^{at}, |f'(t)| \leq Ke^{at}, ..., |f^{(n)}(t) \leq Ke^{at}$ *para* $t \geq M$*. Então,* $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}$ *existe, para* $s > a$*, e é dado por*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s^{(n-1)}f(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Portanto, a ideia é tranformar a EDO em uma equação linear, encontrando a função $F(s)$. A partir disso, aplicando a tranformada inversa é possível encontrar $f(t)$. A Figura 1 mostra um esquema de como a Transformada de Laplace é aplicada em EDO.

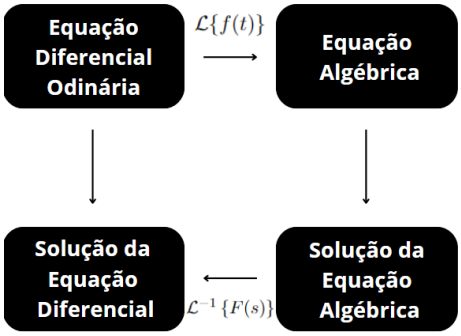

Figura 1: Transformada de Laplace aplicada em EDO

A aplicação estudada nesse trabalho é o modelo de corrida armamentista do Lewis F. Richardson (1881–1953), que pode ser encontrado em (Zill, 2012). A seguir terá um trecho do livro, traduzido pela autora desse trabalho, definindo o modelo de Richardson.

Modelando corridas armamentistas

Por Michael Olinick.

O modelo primário de Richardson de uma corrida armamentista entre dois países é baseado em mútua medo: uma nação é estimulada a aumentar o seu arsenal de armas a uma taxa proporcional ao nível de gastos com armamento de seu rival. O modelo de Richardson leva em conta restrições internas dentro de uma nação que retardam a acumulação de armas: Quanto mais uma nação gasta em armas, mais difícil é fazer maiores aumentos, porque se torna cada vez mais difícil desviar os recursos da sociedade das necessidades básicas, tais como comida e moradia, para armas. Richardson também incorporou no seu modelo outros fatores que impulsionam ou abrandam uma corrida ao armamento que são independentes dos níveis de despesas com armamento.

A estrutura matemática deste modelo é um sistema interligado de duas equações diferenciais lineares de primeira ordem. Se x e y representam a quantidade de riqueza que está sendo gasta em armas por duas nações no tempo t, então o modelo tem a forma, sendo $x' = \dfrac{dx}{dt}$ e $y' = \dfrac{dy}{rt}$

$$\begin{cases} x' &= ay - mx + r \\ y' &= bx - ny + q \end{cases} \tag{1}$$

onde a, b, m e n são constantes positivas, enquanto r e q são constantes que podem ser positivo ou negativo. As constantes a e b medem o medo mútuo; as constantes m e n representam fatores de proporcionalidade para os "freios internos" para novos aumentos de armas; r e q correspondem a fatores econômicos que podem impulsionar ou não o investimento em armas, que não está ligado nem ao medo mútuo nem aos "freios internos".

Percebe-se que o modelo desenvolvido pelo Richardson é um sistema de EDO de primeira ordem. Utilizando o teorema 1 podemos resolver o sistema utilizando Transformada de Laplace.

Portanto, aplicando a Tranformada de Laplace no sistema 1, teremos

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'\} &= \mathcal{L}\{ay - mx + r\} \\ \mathcal{L}\{y'\} &= \mathcal{L}\{bx - ny + q\} \end{cases}$$

Utilizando o Teorema 1 e a tabela de Transformada de Laplace, definindo $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ e $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ e as condições iniciais como $x(0) = C$ e $y(0) = D$, teremos

$$\begin{cases} s.X - x(0) &= -m.X + a.Y + \dfrac{r}{s} \\ s.Y - y(0) &= b.X - n.Y + \dfrac{q}{s} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} s.X + m.X - a.Y &= \dfrac{r}{s} + x(0) \\ \\ -b.X + s.Y + n.Y &= \dfrac{q}{s} + y(0) \end{cases} \implies \begin{cases} (s+m)X - a.Y &= \dfrac{r + x(0)s}{s} \\ \\ -b.X + (s+n)Y &= \dfrac{q + y(0)s}{s} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} s(s+m)X - asY &= r + Cs \\ -bsX + s(s+n)Y &= q + Ds \end{cases} \tag{2}$$

Portanto, chegamos em um sistema geral após a aplicação da Transformada de Laplace. Podemos descobrir também a solução geral para $X(s)$ e $Y(s)$. Resolvendo o sistema (2) chegamos em

$$X(s) = \frac{Cs^2 + (Da + Cn + r)s + (aq + nr)}{s^3 + (m+n)s^2 + (mn - ab)s} \tag{3}$$

$$Y(s) = \frac{Ds^2 + (Cb + Dm + q)s + (mq + br)}{s^3 + (m+n)s^2 + (mn - ab)s} \tag{4}$$

Dessa maneira, dado um sistema 1, podemos aplicar a Transformada de Laplace e chegamos nas soluções (3) e (4). No entanto, as soluções $X(s)$ e $Y(s)$ não são as soluções do sistema 1, para encontrá-las é necessário aplicar a Transformada inversa de Laplace em (3) e (4). Portanto, $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$.

Aplicando o que foi encontrado em um exemplo, teremos.

Exemplo 1. Sendo $a = 1, b = 2, m = 3, n = 4, r = 3$ e $q = 8$, com as condições iniciais $x(0) = 12$ e $y(0)$, resolvemos o sistema abaixo do modelo de corrida armamentista de Richardson.

$$\begin{cases} x' &= -3x + y + 3 \\ y' &= 2x - 4y + 8 \end{cases} \tag{5}$$

Utilizando o sistema geral (2) podemos encontrar como será o sistema (5) após aplicar a Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} s(s+3)X - sY & = 3 + 12s \\ -2sX + s(s+4)Y & = 8 + 15s \end{cases} \tag{6}$$

Assim, podemos usar as soluções gerais (3) e (4) para encontrar as soluções $X(s)$ e $Y(s)$ do sistema (6):

$$X(s) = \frac{12s^2 + (15.1 + 12.4 + 3)s + (1.8 + 4.3)}{s^3 + (3+4)s^2 + (3.4 - 1.2)s} \implies X(s) = \frac{12s^2 + 66s + 20}{s^3 + 7s^2 + 10s} \tag{7}$$

$$Y(s) = \frac{15s^2 + (12.2 + 15.3 + 8)s + (3.8 + 2.3)}{s^3 + (3+4)s^2 + (3.4 - 1.2)s} \implies Y(s) = \frac{15s^2 + 77s + 30}{s^3 + 7s^2 + 10s} \tag{8}$$

Agora, para encontrar as soluções do sistema (5), precisamos encontrar as Transformadas inversas de Laplace das soluções (7) e (8), sendo $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$. Resolvendo por frações parciais, a solução (7) será:

$$\begin{aligned} & \frac{12s^2 + 66s + 20}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+5} \\ \implies & \frac{12s^2 + 66s + 20}{s(s+2)(s+5)} = \frac{A(s+2)(s+5) + Bs(s+5) + Cs(s+2)}{s(s+2)(s+5)} \\ \implies & 12s^2 + 66s + 20 = A(s^2 + 7s + 10) + B(s^2 + 5s) + c(s^2 2s) \\ \implies & 12s^2 + 66s + 20 = (A + B + C)s^2 + (7A + 5B + 2c)s + 10A \end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} A + B + C & = 12 \\ 7A + 5B + 2C & = 66 \implies A = 2,\ B = \dfrac{32}{3},\ C = \dfrac{-2}{3} \\ 10A & = 20 \end{cases}$$

$$\therefore X(S) = \frac{2}{s} + \frac{32}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{-2}{3}\frac{1}{s+5}$$

Aplicando a Transformada inversa de Laplace em $X(s)$ e utilizando a Tabela de Transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(S)\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{32}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$$

$$\therefore x(t) = 2 + \frac{32}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} \tag{9}$$

De forma análoga ao processo feito para encontrar $x(t)$ fazemos para encontrar $y(t)$, utilizando a solução (8), que é dado por:

$$y(t) = 3 + \frac{32}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-5t} \tag{10}$$

Portanto, temos como solução para o sistema (5) são

$$x(t) = 2 + \frac{32}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}, \quad y(t) = 3 + \frac{32}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-5t}$$

As funções $x(t)$ e $y(t)$ encontradas representam as funções dos gastos que as nações x e y terão com armamento em função do tempo t. A Figura 2 mostra o gráfico das soluções, sendo $x(t)$ a função azul e $y(t)$ a função vermelha.

Analisando a Figura 2 podemos perceber que a nação y apresenta um gasto maior em armamento do que a nação x. Mesmo que os freios internos da nação y sejam maiores que os da nação x (constantes m e n), o medo mútuo (constantes a e b) é maior na nação y. Pode-se perceber também que os fatores econômicos de ambas as nações impulsionaram o investimento em armas (constantes r e q positivos), porém na nação y foi muito maior.

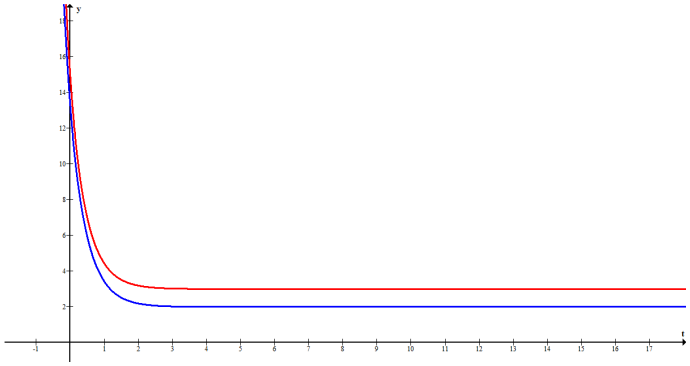

Figura 2: Gráfico das funções $x(t)$ e $y(t)$

CONCLUSÕES

A partir do estudos apresentados notou-se a possibilidade de aplicação da Transformada de Laplace, não apenas para resolver problemas de valores iniciais de EDOs mas também, na solução de sistemas de EDOs. Percebe-se que, ao aplicar a Transformada de Laplace, o sistema de EDOs passa a ser um simples sistema linear que, ao ser resolvido, basta aplicar a Transformada inversa de Laplace para encontrar as soluções do sistema de EDOs.

É importante ressaltar que a utilização da Transformada de Laplace depende da linearidade das EDOs, caso as equações sejam não lineares não é possível aplicar o método. Porém, é possível utilizar o método se a corrida armamentista for modelada para mais de duas nações, assim tendo um sistema de EDOs com mais de 2 equações. Pode-se, por exemplo, estudar a aplicação da Tranformada de Laplace no modelo desenvolvido por Martins (2021), que estendeu o modelo de Richardson para n nações.

Portanto, mesmo com limitações, a Tranformada de Laplace se mostra útil na resolução de sistemas de EDOs.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

A.L.G.B contribuiu com a conceitualização, pesquisa e metodologia do projeto. M.P.A.S atuou como orientadora do projeto. Ambas as autoras contribuíram com a administração do trabalho, bem como sua revisão e edição, e ambos aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

A todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

REFERÊNCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 9 ed. Rio de Janeiro: TLC, 2010. 604 p.

DOETSCH, Gustav. **Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformations.** Nova Iorque: Springer-Verlag, 1974. 325 p.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo.** Vol 2. 5 ed. Rio de Janeiro: TLC, 2001. 607 p.

MARTINS, Luís. **Revisiting the Arms Race Richardson's Model: Beyond the two actors' approach.** Sergipe: Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, 2021. 26 - 45 p.

SPIEGEL, Murray R. **Schaums's outline of Theory and Problems of Laplace Transforms.** Nova Iorque: Mcgraw-Hill Book Company, 1965. 261 p.

ZILL, Dennis G. **A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.** 10 ed. Boston: Cengage Learning, 2012. 489 p.